Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Para determinado valor real de a, o polinómio $P(x)=3x^3+ax^2+bx+2$ é divisível por $x+1$.

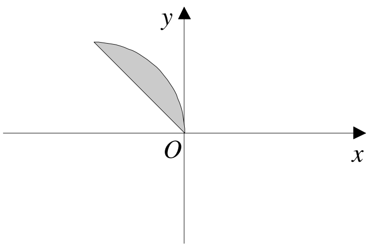
Então, pode afirmar-se que:

(A) $a-b=1$ **(B)** $a+b=-8$ **(C)** $a-b=5$ **(D)** $a=b$

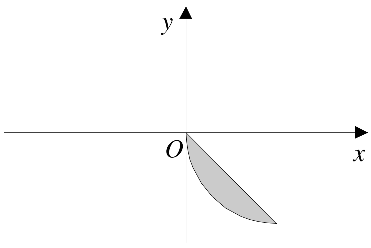
2. Em qual das figuras pode estar, num referencial ortonormado xOy, uma representação geométrica do conjunto definido pela seguinte condição?

$$x+y\geq 0 \wedge x^2+2x+y^2+1\leq 0$$

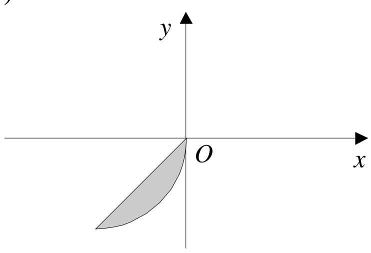
(A)



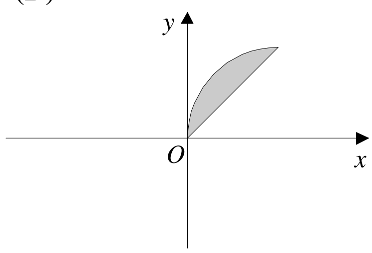
(B)



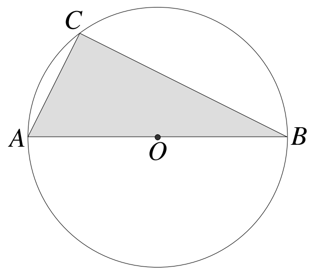
(C)



(D)



3. Na figura estão representados a circunferência de centro O e raio $\sqrt{5}$ cm e o triângulo $[ABC]$ inscrito na circunferência.

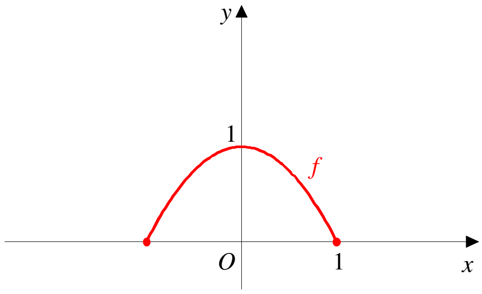


Sabe-se que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência e que $\overline{AC}=2$ cm.

A área do triângulo $[ABC]$, em centímetros quadrados, é igual a:

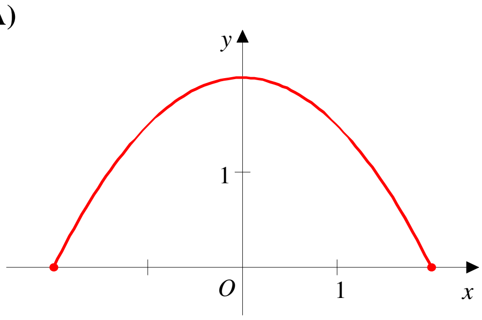
(A) 1 **(B)** 4 **(C)** $\sqrt{6}$ **(D)** $\sqrt{5}$

4. Considere a função f representada graficamente na figura seguinte.

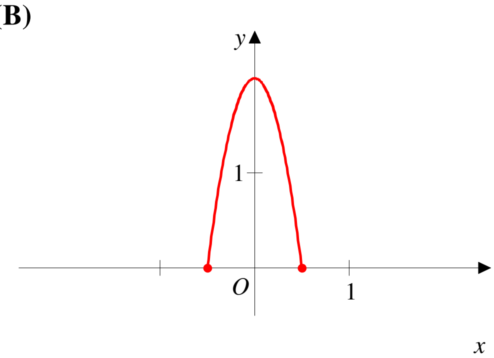


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g definida por $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$?

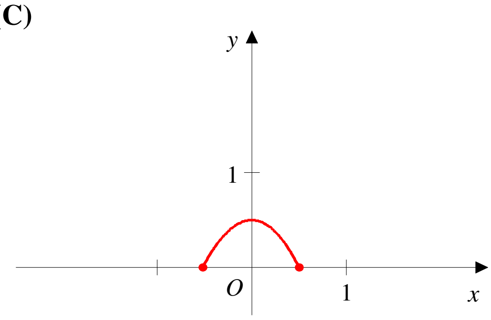
(A)



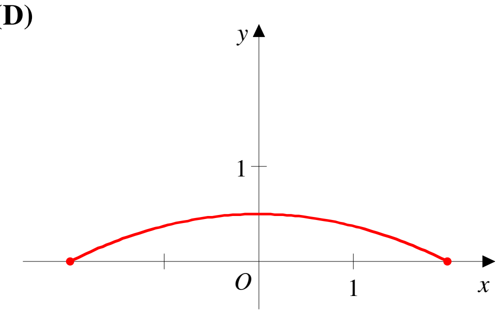
(B)



(C)



(D)



5. Acerca de uma função quadrática f , definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabe-se que o seu contradomínio é $[-2, +\infty[$.

Qual das afirmações seguintes é falsa?

(A) $a > 0$

(B) A função f tem dois zeros.

(C) Se $a \in [-2, +\infty[$, a equação $f(x) = a$ tem duas soluções distintas.

(D) O gráfico da função f num referencial ortonormado xOy interseta o eixo Oy .

Grupo II

1. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, para determinado número real a, por:

$$f(x)=-2x+10 \quad \text{e} \quad g(x)=ax+2$$

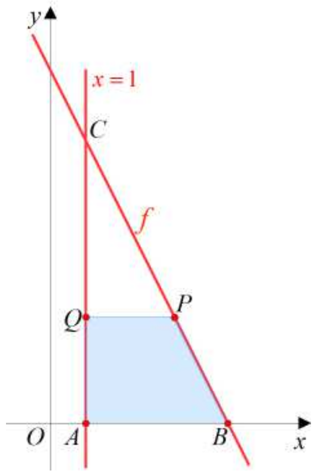
1.1. Determine, caso exista, o valor de a para o qual:

a) o ponto de coordenadas $(5,-1)$ pertence ao gráfico da função inversa de g;

b) $(f \circ g)(-1)=-2$

c) $g(x-4)=f(x)$

1.2. No referencial cartesiano da figura estão representadas parte do gráfico da função f bem como a reta de equação $x=1$.



Sabe-se que:

- o ponto A é a interseção da reta de equação $x=1$ com o eixo Ox;
- B e C são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox e com a reta de equação $x=1$, respetivamente;
- o ponto P desloca-se sobre o segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto C;
- o ponto Q desloca-se sobre o segmento de reta $[AC]$, de forma que os segmentos $[QP]$ e $[AB]$ são paralelos.

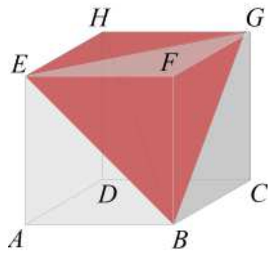
a) Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$ é dada, em função de x, por:

$$A(x)=-x^2+2x+15$$

b) Determine os valores de x para os quais a medida da área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 12.

2. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, o cubo [*ABCDEFGH*].

Sabe-se que os vértices *B*, *E* e *H* têm coordenadas $(-2, 1, -1)$, $(-1, 2, 3)$ e $(-3, 0, 4)$, respetivamente.



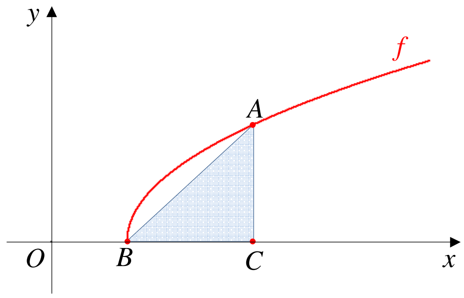
Determine:

2.1. as coordenadas do ponto *C*;

2.2. uma equação vetorial da reta BC e verifique se o ponto de coordenadas $(4, 7, -4)$ pertence a essa reta;

2.3. a medida do volume da pirâmide de base $[EGH]$ e vértice B.

3. Na figura estão representados, num referencial cartesiano, parte do gráfico da função f, de domínio $[1, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$, assim como os pontos A, B e C.



Sabe-se que:

- o gráfico da função f interseta o eixo Ox no ponto B;
- o ponto A, de abcissa x maior do que a abcissa de B, pertence ao gráfico da função f;
- C é o ponto do eixo Ox tal que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

Considere a função d que associa a cada valor de x do domínio de f a distância entre os pontos A e B.

3.1. Mostre que $d(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

3.2. Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$ sabendo que a distância entre os pontos A e B é igual a $2\sqrt{3}$.

3.3. Determine o valor de x sabendo que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Total**
10	10	10	10	10	**50**

Grupo II

1.1. a)	**1.1. b)**	**1.1. c)**	**1.2. a)**	**1.2. b)**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**Total**
10	10	10	15	15	15	15	15	15	15	15	**150**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Se $P(x)=3x^3+ax^2+bx+2$ é divisível por $x+1$, então $P(-1)=0$.

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow 3\times(-1)^3+a\times(-1)^2+b\times(-1)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3+a-b+2=0 \Leftrightarrow a-b-1=0 \Leftrightarrow a-b=1$$

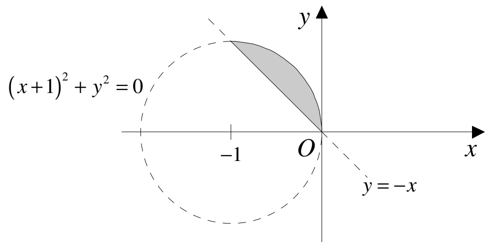
Resposta: (A)

2. $x+y\geq 0 \wedge x^2+y^2+2y+1\leq 0$

- $x+y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -x$ Semiplano limitado pela reta $y=-x$ e que contém o semieixo positivo Oy
- $x^2+2x+y^2+1\leq 0 \Leftrightarrow$

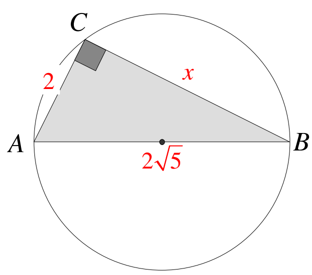
  $\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2\leq 0$ Círculo de centro $(-1,0)$ e raio 1

Conjunto definido pela condição dada:



Resposta: (A)

3. O ângulo ACB é reto por ser inscrito numa semicircunferência.



$\overline{AB}=2\sqrt{5}$

$\overline{AC}=2$

$\overline{BC}=x$

$$2^2+x^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 4+x^2=4\times 5 \Leftrightarrow x^2=20-4 \Leftrightarrow x^2=16 \underset{}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x=4$$

$$\text{Área}_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}=\frac{2\times 4}{2}=4$$

Resposta: (B)

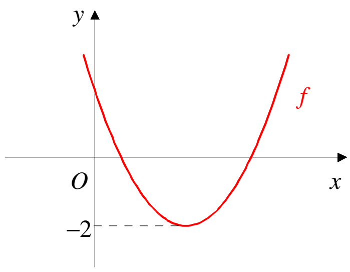
4. $$f(x) \xrightarrow[\substack{\text{Dilatação horizontal}\\ \text{de coeficiente 2}\\ \text{(A) ou (D)}}]{} f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow[\substack{\text{Dilatação vertical de}\\ \text{coeficiente 2}\\ \text{(A)}}]{} g(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Resposta: (A)

5. Se o contradomínio da uma função quadrática f é $[-2, +\infty[$, então o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima sendo -2 a ordenada do vértice.
A equação $f(x) = -2$ tem uma e uma só solução.

Como $-2 \in [-2, +\infty[$, então a afirmação (C) é falsa.

Resposta: (C)



Grupo II

1. $f(x) = -2x + 10$ e $g(x) = ax + 2$

1.1 **a)** Se o ponto de coordenadas $(5, -1)$ pertence ao gráfico da função inversa de g , então $g^{-1}(5) = -1$ pelo que $g(-1) = 5$.

$g(-1) = 5 \Leftrightarrow a \times (-1) + 2 = 5 \Leftrightarrow -a = 5 - 2 \Leftrightarrow a = -3$

b) $(f \circ g)(-1) = -2 \Leftrightarrow f\left[g(-1)\right] = -2 \Leftrightarrow f(-a + 2) = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \times (-a + 2) + 10 = -2 \Leftrightarrow 2a - 4 + 10 = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a = -2 - 6 \Leftrightarrow 2a = -8 \Leftrightarrow a = -4$

c) $g(x - 4) = f(x) \Leftrightarrow a(x - 4) + 2 = -2x + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax - 4a + 2 = -2x + 10 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -4a + 2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$$

1.2. **a)** $A(1, 0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5$

$B(5, 0)$

$P(x, -2x + 10)$, com $1 < x < 5$

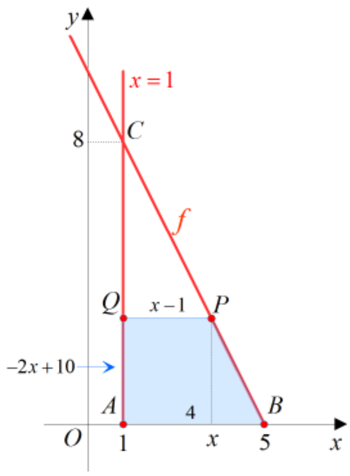
$P(1, -2x + 10)$

$$\text{Área}_{[ABPQ]} = \frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2} \times \overline{AQ}$$

$\overline{AB} = |5 - 1| = 4$

$\overline{PQ} = x - 1$ com $1 < x < 5$

$\overline{AQ} = -2x + 10$ com $1 < x < 5$



$$\text{Área}_{[ABPQ]} = \frac{4 + x - 1}{2} \times (-2x + 10) = (3 + x) \times \frac{-2x + 10}{2} =$$

$$= (3 + x) \times (-x + 5) = -3x + 15 - x^2 + 5x = -x^2 + 2x + 15$$

Portanto, $A(x) = -x^2 + 2x + 15$.

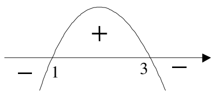
b) $A(x) > 12 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 15 > 12 \wedge 1 < x < 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 15 - 12 > 0 \wedge 1 < x < 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 > 0 \wedge 1 < x < 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]1, 3\right[\cap \left]1, 5\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left]1, 3\right[$



Cálculos auxilares

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 3}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

2. $B(-2, 1, -1)$; $E(-1, 2, 3)$ e $H(-3, 0, 4)$

2.1. $\overrightarrow{EH} = H - E = (-3, 0, 4) - (-1, 2, 3) = (-2, -2, 1)$

$C = B + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{EH} = (-2, 1, -1) + (-2, -2, 1) = (-4, -1, 0)$

$C(-4, -1, 0)$

2.2. A reta BC passa em $B(-2, 1, -1)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{EH} = (-2, -2, 1)$

$BC: (x, y, z) = (-2, 1, -1) + k(-2, -2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

$(4, 7, -4) = (-2, 1, -1) + k(-2, -2, 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4, 7, -4) = (-2 - 2k, 1 - 2k, -1 + k) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2 - 2k \\ 7 = 1 - 2k \\ -4 = -1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -2 - 4 \\ 2k = 1 - 7 \\ k = -4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -6 \\ 2k = -6 \\ k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3$$

Como existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(4, 7, -4) = (-2, 1, -1) + k(-2, -2, 1)$, podemos concluir que o ponto de coordenadas $(4, 7, -4)$ pertence à reta BC .

2.3. $\|\overrightarrow{EH}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

A base da pirâmide é o triângulo retângulo isósceles de base $[EH]$ e altura $[HG]$ cuja medida é igual a 3.

A medida da altura da pirâmide também é igual a 3, ou seja, é igual à medida da aresta do cubo.

$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} A_{\text{base}} \times \text{altura} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3 \times 3}{2} \times 3 = \dfrac{9}{2}$

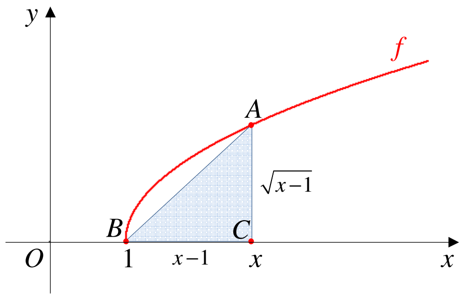
$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{9}{2}$ u.v.

3. $f(x)=\sqrt{x-1}$, $D_f=[1,+\infty[$

3.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$B(1,0)$

$A\left(x,\sqrt{x-1}\right)$



$$d(x)=\overline{AB}=\sqrt{(x-1)^2+\left(\sqrt{x-1}-0\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-2x+1+x-1}=\sqrt{x^2-x}$$

Temos, portanto, $d(x)=\sqrt{x^2-x}$.

3.2. $d(x)=2\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x}=2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x=\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times 12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm 7}{2} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=4$$

Como $x>1$, temos $x=4$.

Verificação:

$\sqrt{4^2-4}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (verdadeiro)

Se $x=4$, então $\overline{BC}=x-1=4-1=3$ e $\overline{AC}=\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$.

Perímetro do triângulo $[ABC]$: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=2\sqrt{3}+3+\sqrt{3}=3\sqrt{3}+3$

3.3. Se o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e isósceles, então $\overline{AC}=\overline{BC}$, ou seja, $\sqrt{x-1}=x-1$

$$\sqrt{x-1}=x-1 \Rightarrow x-1=(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=2$$

Como $x>1$, temos $x=2$.

Verificação: $\sqrt{2-1}=2-1 \Leftrightarrow \sqrt{1}=1$ (verdadeiro)

Logo, $x=2$.