Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

Grupo I

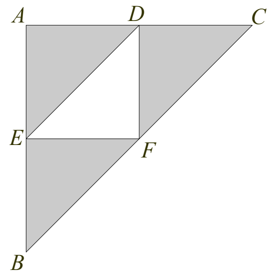
Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ representados na figura ao lado são retângulos e isósceles.

Os pontos D, E e F são os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$.

Tem-se que $\overline{AB} = \sqrt{7} + 1$.

Qual das seguintes é a medida da área da parte sombreada da figura?



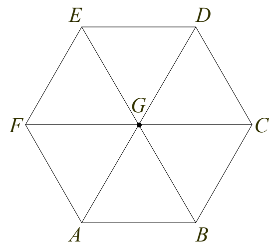
(A) $3 + \frac{3}{4}\sqrt{7}$ **(B)** $3 - \frac{3}{4}\sqrt{7}$ **(C)** $4 + \frac{4}{3}\sqrt{7}$ **(D)** $4 - \frac{4\sqrt{7}}{3}$

2. Sendo $a \in \mathbb{R}$, qual é o resto da divisão inteira do polinómio $3x^4 - x^3 - ax - 1$ por $x + 1$?

(A) $-a + 3$ **(B)** $-a + 1$ **(C)** $a + 3$ **(D)** $a + 1$

3. Considere o hexágono regular representado na figura.

Escolha a opção correta.



(A) $C - \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CD}$ **(B)** $F + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = E$

(C) $\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EA}$ **(D)** $2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

4. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considere o ponto $P(-1,\ 2,\ -4)$ e o plano α que passa em P e é paralelo a yOz. As coordenadas do ponto de interseção do plano α com o eixo Ox são:

(A) $(0,\ 0,\ -4)$ **(B)** $(0,\ 2,\ -4)$ **(C)** $(0,\ 2,\ 0)$ **(D)** $(-1,\ 0,\ 0)$

5. Considere uma função f **par**, de domínio $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, tal que:

$$f(0) = 0\ ,\ f(1) = 1 \text{ e } f(2) = 2$$

Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2 - 1}$.

Em qual das opções seguintes está representado o domínio da função $g \circ f$?

(A) $\{-2, -1, 1\}$ **(B)** $\{-1, 1\}$ **(C)** $\{1, 0, 2\}$ **(D)** $\{1\}$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, a circunferência de equação:

$$x^2 + 2\sqrt{5}x + y^2 - 10y + 25 = 0$$

Admita que $(a,\ b)$ são as coordenadas do centro dessa circunferência e r o seu raio.

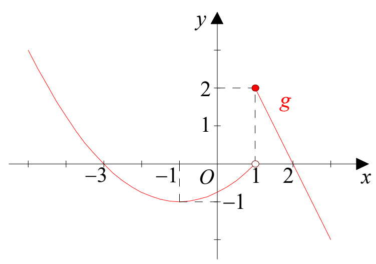
Determine o valor lógico da proposição: $\dfrac{50}{\left(-5a+\sqrt{5}b\right)r} = 1$

Apresente todos os cálculos que tiver de efetuar.

2. Dadas as funções f e g, definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = -\dfrac{2x-7}{3}$;
- a função g está representada parcialmente no referencial ao lado e, tal como a figura sugere, o gráfico da função g é formado por um ramo de parábola e por uma semirreta.



2.1. Mostre que a função f é bijetiva e caracterize f^{-1} (função inversa de f).

2.2. Determine $(f \circ g)(1)$.

2.3. De acordo com os dados da figura, escreva uma expressão analítica que defina a função g.

3. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = -x^2 - 6x - 4$$

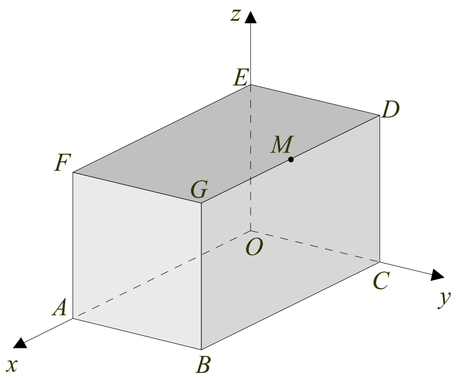
3.1. Escreva a função h por uma expressão do tipo $h(x) = a(x-h)^2 + k$ com $a \neq 0$ e $h,\ k \in \mathbb{R}$.

3.2. Determine:

3.2.1. as coordenadas do vértice do gráfico de h e o seu contradomínio;

3.2.2. os intervalos de monotonia e o(s) extremo(s) absolutos e relativos.

4. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, está representado o paralelepípedo $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- as faces $[OABC]$, $[OAFE]$ e $[OCDE]$ estão contidas nos plano xOy, xOz e yOz, respetivamente;
- o ponto F tem coordenadas $(4,0,2)$;
- $\left\|\overrightarrow{OG}\right\|^2 = 24$
- M é o ponto médio de $[DG]$.

Considere:

- a esfera S definida por $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 \leq 10$;
- a reta r que passa nos pontos C e M .

4.1. Mostre que o ponto G tem coordenadas $(4, 2, 2)$.

4.2. Defina por uma equação cartesiana o plano mediador do segmento de reta $[FC]$.

4.3. Determine um sistema de equações paramétricas da reta r .

4.4. Sejam p e q as seguintes proposições:

p: "A reta r passa no centro da esfera S . "

q: "A reta GD pode ser definida pela condição $y = 2 \wedge z = 2$."

Determine o valor lógico da proposição:

$$p \Rightarrow \sim q$$

4.5. Caracterize a interseção da esfera S com o plano DEF e determine a medida da sua área.

5. Seja f uma função afim e g uma função quadrática definidas por:

$$f(x) = ax + b \quad \text{e} \quad g(x) = ax^2 \text{ , com } a,\ b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Prove que:

"Se $(g \circ f)(2) = 0$, então o valor de a é igual a metade do simétrico de b ."

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.1.	3.2.2.	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	4.5.	5	Total
14	18	10	18	12	8	8	12	12	12	12	12	12	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $A_{\text{sombreada}} = A_{[ABC]} - A_{[DEF]}$

Como $\overline{AB} = \overline{AC}$ e o triângulo $[ABC]$ é retângulo, então:

$$A_{[ABC]} = \frac{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}+1\right)}{2} = \frac{7+2\sqrt{7}+1}{2} = \frac{8+2\sqrt{7}}{2} = 4+\sqrt{7}$$

$\overline{DF} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, então $\overline{DF} = \dfrac{\sqrt{7}+1}{2}$.

$\overline{DF} = \overline{EF}$, pelo que o triângulo $[DEF]$ é retângulo.

Assim:

$$A_{[DEF]} = \frac{\frac{\sqrt{7}+1}{2} \times \frac{\sqrt{7}+1}{2}}{2} = \frac{8+2\sqrt{7}}{8} = 1+\frac{1}{4}\sqrt{7}$$

$$A_{\text{sombreada}} = 4+\sqrt{7}-\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{7}\right) = 3+\frac{3}{4}\sqrt{7}$$

Ou

$$A_{\text{sombreada}} = 3\times A_{[AED]} = 3\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}+1}{2}\times\frac{\sqrt{7}+1}{2} = \frac{3}{8}\times\left(7+2\sqrt{7}+1\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\times\left(8+2\sqrt{7}\right) = 3+\frac{3\sqrt{7}}{4}$$

Resposta: (A)

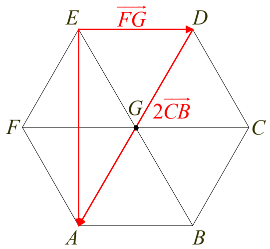
2. $P(x) = 3x^4 - x^3 - ax - 1$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

$P(-1)$ é o resto da divisão inteira pretendida.

$P(-1) = 3(-1)^4 - (-1)^3 - a(-1) - 1 = 3 + \cancel{1} + a - \cancel{1} = a+3$

Resposta: (C)

3.



$\overrightarrow{FG} \times 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EA}$

Ou

$\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{CB} =$

$= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} =$ $\quad\quad$ $\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{ED} \\ 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}\end{array}\right.$

$= \overrightarrow{EA}$

Resposta: (C)

4. O plano yOz tem equação $x=0$.

Como α é paralelo ao plano yOz e passa no ponto P, então α é definido por $x=-1$.

O plano α interseta o eixo do Ox no ponto de coordenadas $(-1,\ 0,\ 0)$.

Resposta: (D)

5. $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

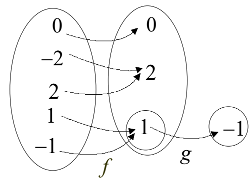
Como *f* é par, $f(-1) = f(1) = 1$, $f(-2) = f(2) = 2$ e $f(0) = 0$.

Logo, $D'_f = \{0, 1, 2\}$.

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 - 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$(x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \vee x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$



$D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\right\}$

$f(x) \in D_g \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$,

dado que 1 é o único elemento do contradomínio de *f* que pertence ao domínio de *g*.

Portanto, $D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge (x = -1 \vee x = 1)\right\} = \{-1, 1\}$.

Resposta: (B)

Grupo II

1. $x^2 + 2\sqrt{5}x + y^2 - 10y + 25 = 0$

$\left(x^2 + 2\sqrt{5}x + \left(\sqrt{5}\right)^2\right) + \left(y^2 - 10y + 5^2\right) + \cancel{25} - 5 - \cancel{25} = 0$

$\left(x + \sqrt{5}\right)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ equação da circunferência de centro $\left(-\sqrt{5},\ 5\right)$ e raio $\sqrt{5}$

Então, $a = -\sqrt{5}$ e $b = 5$ e $r = \sqrt{5}$.

$$\frac{50}{\left(-5a + \sqrt{5}b\right)r} = 1 \Leftrightarrow \frac{50}{\left[-5\left(-\sqrt{5}\right) + \left(\sqrt{5} \times 5\right)\right] \times \sqrt{5}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{\left(5\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right)\sqrt{5}} = 1 \Leftrightarrow \frac{50}{5 \times 5 + 5 \times 5} = 1 \Leftrightarrow \frac{50}{50} = 1$$

A proposição é verdadeira.

2.1. $f(x) = -\dfrac{2x-7}{3}$

f é bijetiva se f é sobrejetiva e f é injetiva.

- f é sobrejetiva se, para todo o $y \in D'_f$ existir um elemento $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$.

  $$-\frac{2x-7}{3} = y \Leftrightarrow -2x + 7 = 3y \Leftrightarrow 2x = 7 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{7-3y}{2}$$

  Para qualquer $y \in \mathbb{R}$ existe um número real $x \in \mathbb{R}$ $\left(x = \dfrac{7-3y}{2}\right)$ tal que $y = f(x)$.

  Logo, f é sobrejetiva.

- f é injetiva se e somente se:

  $\forall_{x_1, x_2} \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  $$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -\frac{2x_1 - 7}{3} = -\frac{2x_2 - 7}{3} \Leftrightarrow -2x_1 + \cancel{7} = -2x_2 + \cancel{7} \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

  Logo, f é injetiva.

Assim se conclui que f é bijetiva.

Como f é bijetiva, então admite inversa.

$$-\frac{2x-7}{3}=y \Leftrightarrow x=\frac{7-3y}{2}$$

$$D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$$

A função inversa é:

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ &x \mapsto \frac{7-3x}{2} \end{aligned}$$

2.2. $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2)=-\frac{2\times 2-7}{3}=-\frac{-3}{3}=1$

2.3. Para $x<1$:

$$g(x)=a(x-h)^2+k$$

Vértice da parábola: $V(-1,-1)$

$$g(x)=a(x+1)^2-1$$

O ponto $P(-3,\ 0)$ pertence à parábola.

$$g(-3)=0 \Leftrightarrow a(-3+1)^2-1=0 \Leftrightarrow 4a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2-1$$

Para $x\geq 1$:

$$g(x)=mx+b$$

$A(1,\ 2)$ e $B(2,\ 0)$

$$m=\frac{2-0}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$y=-2x+b$$

$$0=-2\times 2+b \Leftrightarrow b=4$$

$$g(x)=-2x+4$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+1)^2-1 & \text{se } x<1 \\ -2x+4 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

3. $h(x)=-x^2-6x-4$; $D_h=\mathbb{R}$

3.1. $h(x)=-x^2-6x-4=-\left(x^2+6x+4\right)=$

$$=-\left(x^2+6x+3^2\right)-4+9=$$

$$=-(x+3)^2+5$$

Então, $h(x)=-(x+3)^2+5$

3.2.1. $V(h,\ k)$, pelo que $V(-3,\ 5)$.

Como $a<0$, a concavidade é voltada para baixo e, assim, $D'_h=\left]-\infty,\ 5\right]$.

3.2.2.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$
		Máx.	

A função h é crescente em $]-\infty, \ -3]$ e decrescente em $[-3, \ +\infty[$.

O máximo da função h é 5 (máximo absoluto) e h não tem mínimo.

4.

4.1. Seja o ponto $F(4,0,2)$.

O ponto G pertence aos planos $x=4$ e $z=2$, pelo que $G(4,y,2)$.

Assim, $\overrightarrow{OG}(4,y,2)$.

$$\left\|\overrightarrow{OG}\right\|^2 = 24 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4^2+y^2+2^2}\right)^2 = 24 \Leftrightarrow 16+y^2+4=24 \Leftrightarrow y^2=4 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=2$$

Desta forma se conclui que $G(4,2,2)$.

4.2. Sejam os pontos $F(4,0,2)$ e $D(0,2,0)$, α o plano mediador de $[FC]$ e $P(x,y,z)$ um ponto de α.

$$d(F,P)=d(C,P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2+(z-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2+z^2-4z+4 = x^2+y^2-4y+4+z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8x+4y-4z+16+4-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-y+z-4=0$$

α: $2x-y+z-4=0$

4.3. Sejam os pontos $G(4,2,2)$ e $D(0,2,2)$.

$$M=\left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{2+2}{2}\right)=(2,\ 2,\ 2)$$

Dado que $C(0,2,0)$, então:

$$\overrightarrow{MC}=C-M=(-2,0,-2)=-2(1,0,1)$$

$\vec{r}(1,0,1)$, colinear com $\overrightarrow{MC}$, é um vetor diretor da reta *r*.

Equação vetorial de *r*: $(x,y,z)=(0,2,0)+k(1,0,1), \ k\in\mathbb{R}$

Sistema de equações paramétricas da reta r:

$$\begin{cases} x=0+k \\ y=2+0k, \, k\in\mathbb{R} \\ z=0+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ y=2, \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$$

4.4. Centro da esfera *S*: $H(1,2,1)$

No sistema de equações paramétricas da reta *r*, substituindo k por 1, obtém-se o ponto *H*. Logo, a proposição *p* é verdadeira.

A reta *GD* é a interseção do plano *GDE*, de equação $z=2$, com o plano e *GDC*, de equação $y=2$.

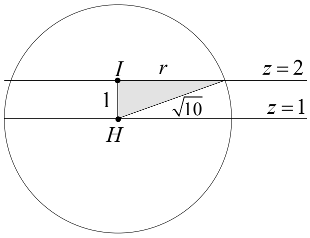
Logo, a reta *GD* pode ser definida pela condição $y=2 \wedge z=2$, pelo que a proposição *q* é verdadeira.

Portanto, a proposição $p \Rightarrow \sim q$ é falsa porque $(V \Rightarrow \sim V) \Leftrightarrow (V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$.

4.5. $S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 \leq 10$

A esfera *S* tem centro $H(1,2,1)$ e raio $\sqrt{10}$.

O plano *DEF* é o plano de equação $z = 2$.
O plano de equação $z = 1$ passa no centro da esfera.



O plano *DEF* interseta a esfera *S* segundo um círculo de raio *r* tal que:

$$r^2 + 1^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = 10 - 1 \Leftrightarrow r^2 = 9 \overset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 3$$

Portanto, a interseção da esfera *S* com o plano *DEF* é o círculo de raio 3, centro $I(1, 2, 2)$, contido no plano de equação $z = 2$.
A área do círculo é $\pi \times 3^3 = 9\pi$.

Outro processo:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \leq 10 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (2-1)^2 \leq 10 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \\ z = 2 \end{cases}$$

A condição define um círculo de raio 3 , centro $(1, 2, 2)$ e está contido no plano de equação $z = 2$.

5. $f(x) = ax + b$; $g(x) = ax^2$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Pretende-se provar que se $(g \circ f)(2) = 0$, então $a = -\frac{1}{2}b$.

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2a + b) = a(2a + b)^2$

Se $(g \circ f)(2) = 0$, então $a(2a + b)^2 = 0$.

$$a(2a + b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2a + b = 0$$

Como é dado que $a \neq 0$, temos

$$a(2a + b)^2 = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}b$$

Portanto, se $(g \circ f)(2) = 0$, então $a = -\frac{1}{2}b$.