Proposta de teste de avaliação

Matemática A

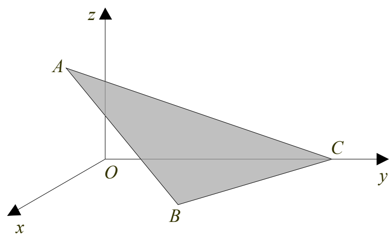
10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na sua folha de respostas, o número de cada item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço considere o triângulo [*ABC*]:



Sabe-se que:

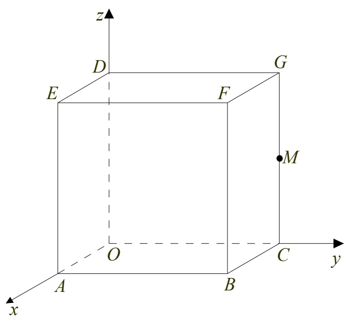
- o ponto *A* pertence ao plano *xOz*;
- o ponto *C* pertence ao eixo *Oy*;
- $\overrightarrow{AB}(2,\ 4,-3)$ e $\overrightarrow{CB}(4,-2,\ 0)$

A ordenada do ponto *C* é igual a:

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

2. Na figura está representado, num referencial ortonormado *Oxyz*, um prisma quadrangular regular. Sabe-se que:

- o vértice *A* pertence ao eixo *Ox* ;
- o vértice *C* pertence ao eixo *Oy* ;
- o vértice *D* pertence ao eixo *Oz* ;
- *M* é o ponto médio de [*GC*] ;
- o vértice *F* tem coordenadas $(1,\ 2,\ 2)$.



Sabendo que α é o plano mediador de [*EM*], qual das afirmações seguintes é verdadeira?

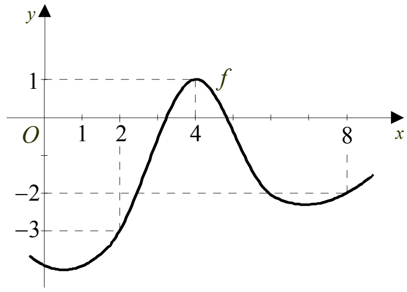
(A) A reta *DB* está contida no plano α.

(B) O plano α passa na origem do referencial.

(C) O eixo *Ox* interseta o plano α no ponto de coordenadas $(1, 0, 0)$.

(D) O eixo *Oy* não interseta o plano α.

3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f* de domínio $\mathbb{R}$.



Sabe-se que *g* é a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(8) = -1$ **(B)** $g(8) = -2$

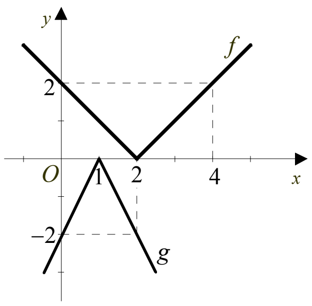
(C) $g(4) = -2$ **(D)** $g(4) = -1$

4. Sabe-se que *h* é uma função bijetiva tal que $h(5) = -1$.

O conjunto-solução da equação $h(2x-1)+1=0$ é:

(A) $\{3\}$ **(B)** $\{0\}$ **(C)** $\{5\}$ **(D)** $\{-1\}$

5. Na figura está representada, num referencial ortonormado *xOy*, parte dos gráficos de duas funções, *f* e *g*, de domínio $\mathbb{R}$, em que cada um dos gráficos é formado pela união de duas semirretas.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira para todo o número real *x* ?

(A) $g(x) = -f(2x)$ **(B)** $g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$

(C) $g(x) = f(-2x)$ **(D)** $g(x) = f\left(-\frac{x}{2}\right)$

Grupo II

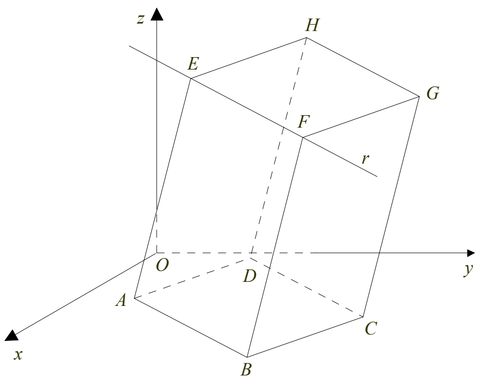
Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Fixado um referencial ortonormado do espaço, considere o paralelepípedo retângulo [*ABCDEFGH*] e a reta *r* que passa nos pontos *E* e *F*.

Sabe-se que:

- os vértices *A*, *B* e *D* têm coordenadas $(0, -1, -2)$, $(2,\ 5, -4)$ e $(-6,\ 1, -2)$, respetivamente;
- o vetor $\overrightarrow{CH}$ tem coordenadas $(-1, -3,\ 12)$.



1.1. Mostre que o vértice *E* tem coordenadas $(1,\ 2,\ 8)$.

1.2. Determine as coordenadas do ponto *G*

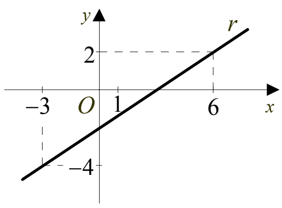
1.3. Determine a medida do volume do paralelepípedo.

1.4. Determine um sistema de equações paramétricas da reta *r*.

1.5. Mostre que o ponto $S(4,\ 11,\ 5)$ pertence à reta *r*.

1.6. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta *r* com o plano *xOy*.

2. Na figura está representada, num referencial ortonormado *xOy*, parte de uma reta *r*, gráfico de uma função afim *f*.



A reta *r* passa nos pontos de coordenadas $(-3, -4)$ e $(6,\ 2)$.

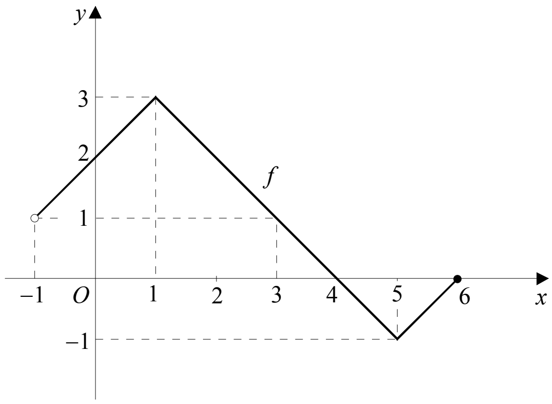
Considere, ainda, a função *g* definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = 2x + 6$.

2.1. Determine uma expressão analítica de *f* e conclua que $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$.

2.2. Mostre que os gráficos das funções *f* e *g* se intersetam num ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares.

2.3. Mostre que $f \circ g = g \circ f$.

3. Na figura está representada graficamente uma função *f* de domínio $]-1,\ 6]$.



Seja *g* a função definida por $g(x) = f(x-2)+1$.

3.1. Indique os intervalos de monotonia da função *f*.

3.2. Indique os extremos (relativos e absolutos) de *f* bem como os respetivos maximizantes e minimizantes.

3.3. Indique o domínio, o contradomínio e os zeros da função *g*.

FIM

Cotações

Grupo I	Grupo II												Total
	1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**1.4**	**1.5.**	**1.6.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	
40 (5 × 8)	12	12	12	12	12	12	18	18	18	8	8	18	200

Proposta de resolução

Grupo I

1. $A(x,\ 0,\ z)$ e $C(0,\ y,\ 0)$

$\overrightarrow{AB}(2,\ 4,\ -3)$ e $\overrightarrow{CB}(4,\ -2,\ 0)$

$A+\overrightarrow{AB}=B$ e $C+\overrightarrow{CB}=B$

$$A+\overrightarrow{AB}=C+\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (x,\ 0,\ z)+(2,\ 4,-3)=(0,\ y,\ 0)+(4,-2,\ 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2,\ 4,\ z-3)=(4,\ y-2,\ 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ 4=y-2 \\ z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \\ z=3 \end{cases}$$

O ponto C tem ordenada 6.

Resposta: (C)

2. $\overline{AE}=\overline{OC}=2$

$\overline{OA}=\overline{CM}=1$

Como os triângulos retângulos $[OAE]$ e $[OCM]$ são iguais, temos que $\overline{OE}=\overline{OM}$.

Podemos, portanto, concluir que o ponto $O(0, 0, 0)$ pertence ao plano mediador de $[EM]$, ou seja, a α.

Resposta: (B)

3. Da análise do gráfico de f podemos concluir que $f(2)=-3$, $f(4)=1$ e $f(8)=-2$.

$$g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+1$$

$$g(8)=f\left(\frac{8}{2}\right)+1=f(4)+1=1+1=2$$

$$g(4)=f\left(\frac{4}{2}\right)+1=f(2)+1=-3+1=-2$$

Resposta: (C)

4. $h(5)=-1 \Leftrightarrow h^{-1}(-1)=5$

$$h(2x-1)+1=0 \Leftrightarrow h(2x-1)=-1 \Leftrightarrow 2x-1=h^{-1}(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=5 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$$

Resposta: (A)

5. O gráfico da função g pode ser obtido através do gráfico de f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ $\left(y = f(2x)\right)$, seguida de uma reflexão de eixo Ox. Portanto, $g(x) = -f(2x)$.

Resposta: (A)

Grupo II

1. $A(0, -1, -2)$, $B(2,\ 5, -4)$ e $D(-6,\ 1, -2)$

$\overrightarrow{CH}(-1, -3,\ 12)$

1.1. $E = B + \overrightarrow{BE} = B + \overrightarrow{CH} =$ $\quad\left(\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}\right)$

$$= (2,\ 5,\ -4) + (-1, -3,\ 12) = (2-1,\ 5-3, -4+12) = (1,\ 2,\ 8)$$

Assim, $E(1,\ 2,\ 8)$.

1.2. $G = A + \overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ $\quad\left(\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \text{ e } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}\right)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 5, -4) - (0, -1, -2) = (2,\ 6, -2)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-6,\ 1, -2) - (0, -1, -2) = (-6,\ 2,\ 0)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (1,\ 2,\ 8) - (0, -1, -2) = (1,\ 3,\ 10)$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = (2,\ 6, -2) + (-6,\ 2,\ 0) + (1,\ 3,\ 10) =$

$$= (2-6+1,\ 6+2+3, -2+0+10) = (-3,\ 11,\ 8)$$

$G = A + \overrightarrow{AG} = (0, -1, -2) + (-3,\ 11,\ 8) = (-3,\ 10,\ 6)$

Assim, $G(-3,\ 10,\ 6)$.

1.3. $V_{\text{paralelepípedo}} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$

$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$

$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 10^2} = \sqrt{1+9+100} = \sqrt{110}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = 2\sqrt{11} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{110} = 4 \times \sqrt{11 \times 10} \times \sqrt{110} = 4 \times \sqrt{110} \times \sqrt{110} = 4 \times 110 = 440$

Logo, o volume é igual a 440.

1.4. $r: P = E + k\overrightarrow{EF}$, $k \in \mathbb{R}$

Como $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, então:

$r:\ (x, y, z) = (1,\ 2,\ 8) + k(2,\ 6,\ -2),\ k \in \mathbb{R}$ (Equação vetorial)

$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + 6k \\ z = 8 - 2k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$ (Equações paramétricas)

1.5. No caso de $S(4,\ 11,\ 5) \in r$:

$$\begin{cases} 4 = 1 + 2k \\ 11 = 2 + 6k \\ 5 = 8 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 3 \\ 6k = 9 \\ 2k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

S é o ponto que se obtém das equações paramétricas de *r* para $k = \frac{3}{2}$.

Logo, o ponto *S* pertence à reta *r* .

1.6. O plano *xOy* é definido pela equação $z = 0$

Substituindo *z* por 0 no sistema de equações paramétricas, vem:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + 6k \\ 0 = 8 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + 6k \\ 2k = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \times 4 \\ y = 2 + 6 \times 4 \\ k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 26 \\ k = 4 \end{cases}$$

O ponto de interseção da reta *r* com o plano *xOy* tem coordenadas $(9,\ 26,\ 0)$.

2.1. Equação da reta que passa nos pontos de coordenadas $(-3,\ -4)$ e $(6,\ 2)$.

$r:\ y = mx + b$

$$m = \frac{2 - (-4)}{6 - (-3)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + b$$

Como o ponto de coordenadas $(6,\ 2)$ pertence à reta *r*, temos:

$$2 = \frac{2}{3} \times 6 + b \Leftrightarrow 2 = 4 + b \Leftrightarrow b = -2$$

Logo, $y = \frac{2}{3}x - 2$ é uma equação da reta *r*.

Como o gráfico de *f* é a reta *r*, temos que $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$.

2.2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x-2=2x+6 \Leftrightarrow 2x-6=6x+18 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x-6x=18+6 \Leftrightarrow -4x=24 \Leftrightarrow x=\frac{24}{-4} \Leftrightarrow x=-6$$

$y=f(-6)=\frac{2}{3}\times(-6)-2=-4-2=-6=g(-6)$

Os gráficos das funções *f* e *g* intersetam-se no ponto de coordenadas $(-6,-6)$ que pertence à reta de equação $y=x$, ou seja, pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

2.3. $f(x)=\frac{2}{3}x-2$, $g(x)=2x+6$ e $D_f=D_g=\mathbb{R}$

$D_{g\circ f}=\{x: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=\left\{x: x\in\mathbb{R} \wedge \frac{2}{3}x-2\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left(\frac{2}{3}x-2\right)=2\left(\frac{2}{3}x-2\right)+6=$

$$=\frac{4}{3}x-4+6=\frac{4}{3}x+2$$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $(g\circ f)(x)=\frac{4}{3}x+2$.

$D_{f\circ g}=\{x: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\}=\{x: x\in\mathbb{R}\wedge 2x+6\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(2x+6)=\frac{2}{3}(2x+6)-2=$

$$=\frac{4}{3}x+\frac{12}{3}-2=\frac{4}{3}x+4-2=\frac{4}{3}x+2$$

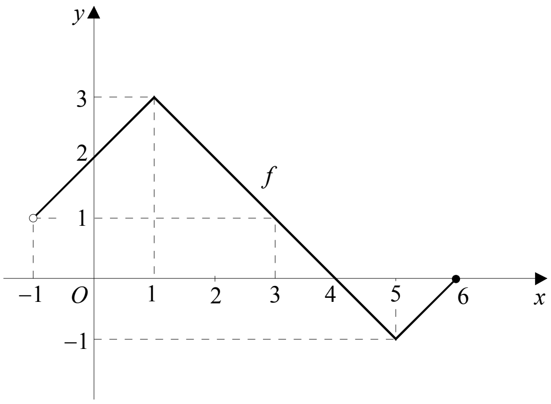
$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $(f\circ g)(x)=\frac{4}{3}x+2$

Portanto, $f\circ g=g\circ f$.

3.1 *f* é estritamente crescente em $]-1,\ 1]$ e em $[5,\ 6]$ e estritamente decrescente em $[1,\ 5]$.

3.2. *f* tem máximo absoluto igual a 3 para $x=1$ e mínimo absoluto igual a -1 para $x=5$.
f admite um máximo relativo igual a 0 para $x=6$.

3.3. $g(x) = f(x-2)+1$



O gráfico de g obtém-se do gráfico de f pela translação de vetor $(\mathbf{2},\ \mathbf{1})$:

$D_f =]-1,\ 6]$

$D_g =]-1+\mathbf{2},\ 6+\mathbf{2}] =]1,\ 8]$

$D'_f = [-1,\ 3]$

$D'_g = [-1+\mathbf{1},\ 3+\mathbf{1}] = [0,\ 4]$

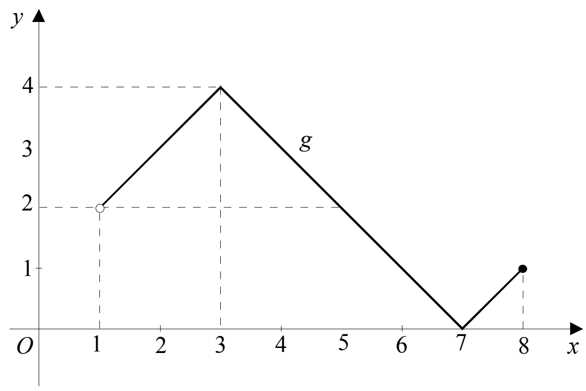
Zeros de g:

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-2)+1 = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -1 \Leftrightarrow$ $\quad (f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 5)$

$\Leftrightarrow x-2 = 5 \Leftrightarrow x = 7$

Resolução alternativa:

Construindo o gráfico de g pela translação do gráfico de f de vetor $(2,\ 1)$, temos que:



$D_g =]1,\ 8]$

$D'_g = [0,\ 4]$

Zeros de g: $x = 7$