.

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

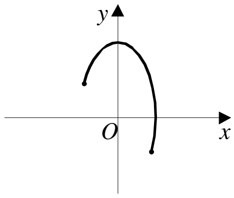
Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

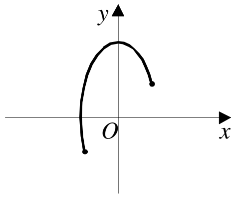
1. Considere a condição $4x^2 + y^2 = 4 \wedge x + y \geq 0$.

Em qual das opções seguintes pode estar representado, em referencial ortonormado xOy, o conjunto de pontos definido por esta condição?

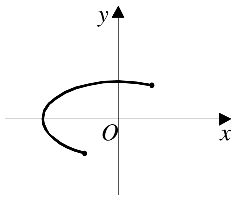
(A)



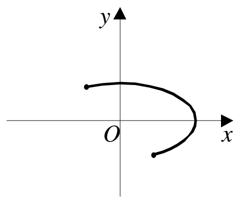
(B)



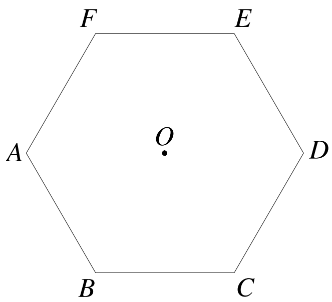
(C)



(D)



2. Na figura está representado o hexágono regular $[ABCDEF]$ de centro no ponto O.



Qual das seguintes igualdades é **falsa**?

(A) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$

(B) $E + \left(\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{CD}\right) = C$

(C) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CO}\right) + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OA}$

(B) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE}$

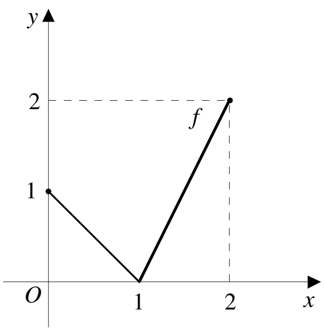
3. Num referencial ortonormado *Oxyz*, a condição $x^2+(y-4)^2+z^2 \leq 25$ define uma esfera.

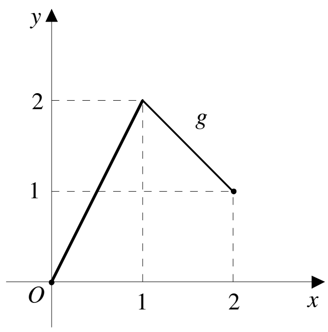
Sabe-se que a interseção do plano α com a esfera é um círculo de raio 3.

Qual das equações seguintes pode definir o plano α?

(A) $y=0$ **(B)** $y=1$ **(C)** $y=4$ **(D)** $y=7$

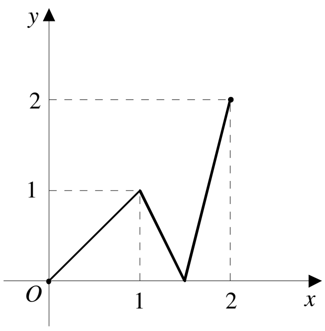
4. Considere duas funções f e g, de domínio $[0, 2]$, cujos gráficos se apresentam a seguir.



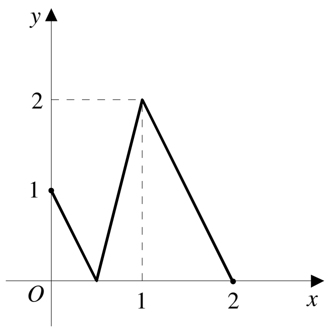


Qual das seguintes opções pode corresponder ao gráfico da função $f \circ g$?

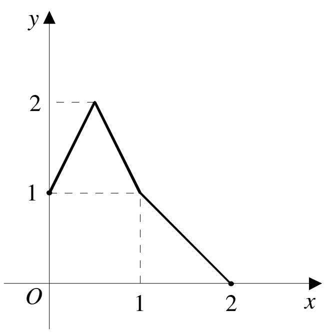
(A)



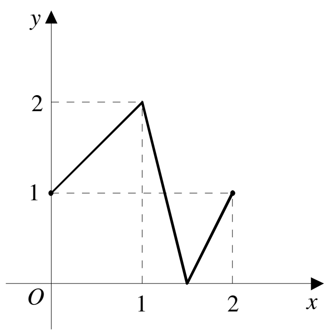
(B)



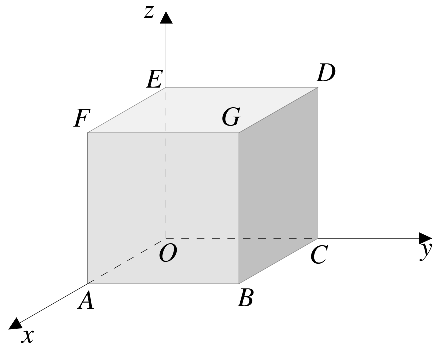
(C)



(D)



5. No referencial ortonormado $Oxyz$ está representado o cubo $[OABCDEFG]$ de aresta 2.



Sabe-se que:

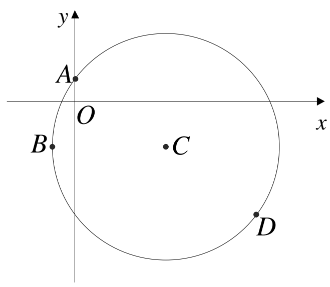
- os vértices A, C e E pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto P, de coordenadas $\left(k^2, \sqrt{2}k, 2+k\right)$, pertence à interseção do plano mediador da aresta $[OA]$ com o plano mediador da aresta $[OE]$.

O valor de k é:

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** $-\sqrt{2}$ **(C)** 1 **(D)** -1

Grupo II

1. Num plano munido de um referencial ortonormado $\left(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$, considere os pontos $A(0,1)$ e $B(-1,-2)$, bem como a circunferência de centro C definida, para determinado valor real positivo de k, por $(x-4)^2+(y+2)^2=k$.



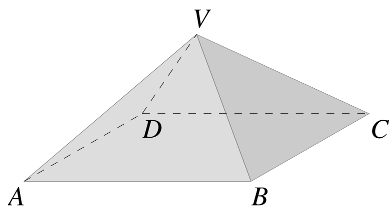
1.1. Sabendo que a circunferência passa no ponto A, mostre que $k = 25$.

1.2. Verifique que o ponto B também pertence à circunferência.

1.3. Determine as coordenadas do ponto D sabendo que $[AD]$ é um diâmetro da circunferência.

1.4. Justifique que o triângulo $[ABD]$ é retângulo e determine a sua medida de área.

2. Fixado um referencial ortonormado do espaço considere a pirâmide quadrangular regular de vértice V e base $[ABCD]$.



Sabe-se que $A(-2,-1,4)$ e $C(0,1,-4)$.

2.1. Mostre que $x+y-4z+1=0$ é uma equação do plano BVD.

2.2. Sabendo que o vértice V pertence à reta definida pelo sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x=k \\ y=2k \\ z=k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

, mostre que V tem coordenadas $(1,2,1)$.

2.3. Determine uma equação vetorial da reta MV em que M é o ponto médio do segmento $[AC]$.

2.4. Determine a medida do volume da pirâmide.

2.5. Determine uma equação da superfície esférica que passa em A e C e cujo centro, E, pertence ao eixo Ox.

Sugestão: Comece por justificar que E é o ponto de interseção do eixo Ox com o plano BVD.

3. Seja $[ABC]$ um triângulo e M o ponto médio de $[BC]$.

Mostre que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
10	10	10	10	10	**50**

Grupo II

1.1.	1.2.	1.3.	1.4	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	2.5.	3.	Total
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	**150**

Proposta de resolução

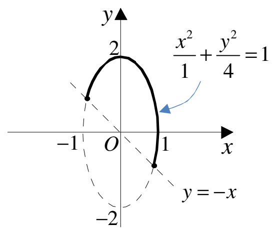
Grupo I

1. $4x^2+y^2=4 \wedge x+y\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1 \wedge y\geq -x$

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ define uma elipse de centro em (0, 0).

$a^2=1 \Leftrightarrow a=1$ (semieixo menor)

$b^2=4 \Leftrightarrow b=2$ (semieixo maior)



Resposta: (A)

2. **(A)** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}$ (verdadeira)

(B) $E+\left(\overrightarrow{FO}-\overrightarrow{CD}\right)=E+\left(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{DC}\right)=$

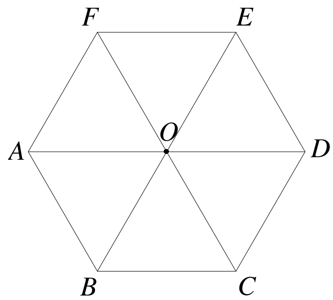
$=E+\left(\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OB}\right)=E+\overrightarrow{FB}=E+\overrightarrow{EC}=C$ (verdadeira)

(C) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CO}\right)+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{EF}=$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EF}=$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}\neq\overrightarrow{OA}$ (falsa)

(D) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}-2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}$ (verdadeira)

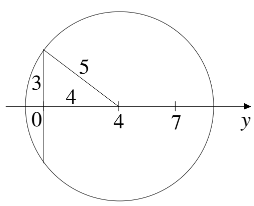


Resposta: (C)

3. $x^2+\left(y-4\right)^2+z^2\leq 25$ define uma esfera de raio 5 e centro $C\left(0,4,0\right)$.

(A) $\begin{cases} x^2+\left(y-4\right)^2+z^2\leq 25 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(0-4\right)^2+z^2\leq 25 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

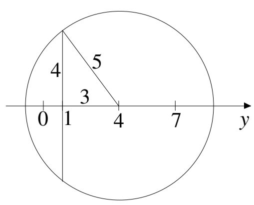
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+16+z^2\leq 25 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2\leq 9 \\ y=0 \end{cases}$



A interseção do plano α com a esfera é um círculo de raio 3.

(B) $\begin{cases} x^2+\left(y-4\right)^2+z^2\leq 25 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(1-4\right)^2+z^2\leq 25 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

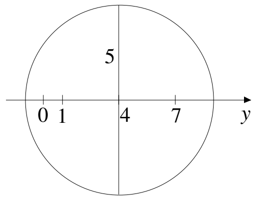
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9+z^2\leq 25 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2\leq 16 \\ y=1 \end{cases}$



A interseção do plano α com a esfera é um círculo de raio 4.

(C) $\begin{cases} x^2+(y-4)^2+z^2 \leq 25 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(4-4)^2+z^2 \leq 25 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

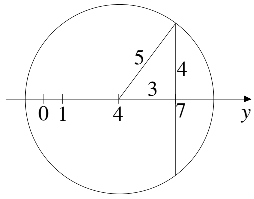
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+0+z^2 \leq 25 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2 \leq 25 \\ y=4 \end{cases}$



A interseção do plano α com a esfera é um círculo de raio 5.

(D) $\begin{cases} x^2+(y-4)^2+z^2 \leq 25 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(7-4)^2+z^2 \leq 25 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow$

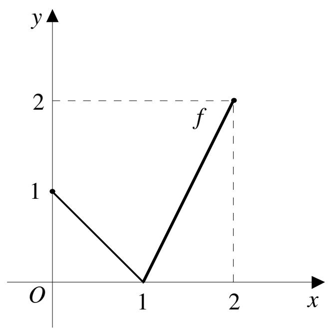
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9+z^2 \leq 25 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+z^2 \leq 16 \\ y=7 \end{cases}$

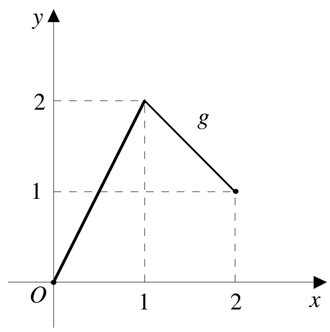


A interseção do plano α com a esfera é um círculo de raio 4.

Resposta: (A)

4.





$(f \circ g)(0) = f[g(0)] = f(0) = 1$

$(f \circ g)(1) = f[g(1)] = f(2) = 2$

$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(1) = 0$

O gráfico de $f \circ g$ apenas pode ser o representado em (B).

Resposta: (B)

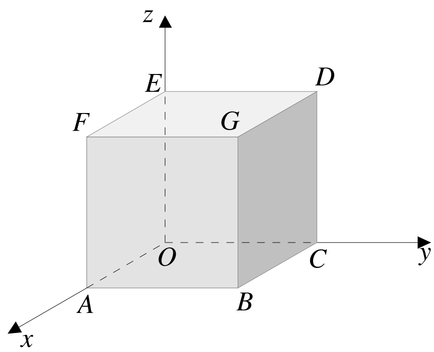
5. Plano mediador da aresta $[OA]$: $x=1$

Plano mediador da aresta $[OE]$: $z=1$

O ponto $P\left(k^2, \sqrt{2}k, 2+k\right)$ pertence à reta definida por $x=1 \wedge z=1$.

Logo, $k^2=1 \wedge 2+k=1 \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \vee k=1 \\ k=1-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \vee k=1 \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow k=-1$



Resposta: (D)

Grupo II

1. $A(0,1)$ e $B(-1,-2)$

1.1. Como $A(0,1)$ pertence à circunferência definida por $(x-4)^2+(y+2)^2=k$, temos:

$(0-4)^2+(1+2)^2=k \Leftrightarrow k=16+9 \Leftrightarrow k=25$

1.2. $B(-1,-2)$ e $(x-4)^2+(y+2)^2=25$

$(-1-4)^2+(-2+2)^2=5^2+0^2=25$

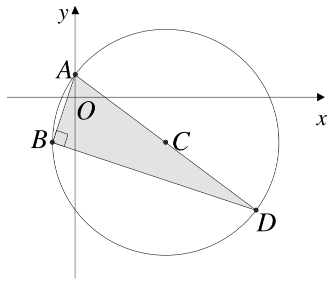
Logo, o ponto B também pertence à circunferência.

1.3. A circunferência $(x-4)^2+(y+2)^2=25$ tem centro em $C(4,-2)$.

$\overrightarrow{AC}=C-A=(4,-2)-(0,1)=(4,-3)$

$D=C+\overrightarrow{CD}=C+\overrightarrow{AC}=(4,-2)+(4,-3)=(4+4,\ -2-3)=(8,\ -5)$

1.4. Como $[AD]$ é um diâmetro da circunferência, o ângulo DBA é reto por ser um ângulo inscrito numa semicircunferência. Logo, o triângulo $[ABD]$ é retângulo em B.



Sejam $A(0,1)$, $B(-1,-2)$ e $D(8,-5)$.

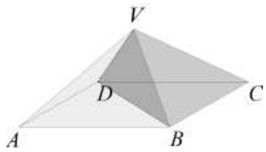
$\overline{AB}=\sqrt{(-1-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$\overline{BD}=\sqrt{(8+1)^2+(-5+2)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}$

$A_{[ABD]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BD}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}\times\sqrt{90}}{2}=\dfrac{\sqrt{900}}{2}=\dfrac{30}{2}=15$ u.a.

2. $A(-2,-1,4)$ e $C(0,1,-4)$

2.1. O plano BVD é o plano mediador de $[AC]$.



Seja $P(x,\ y,\ z)$ um ponto do plano BVD.

$d(A,P)=d(C,P)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=(x-0)^2+(y-1)^2+(z+4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2+2y+1+z^2-8z+16=x^2+y^2-2y+1+z^2+8z+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+2y+2y-8z-8z+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+4y-16z+4=0 \Leftrightarrow x+y-4z+1=0$

$x+y-4z+1=0$ é uma equação do plano BVD.

2.2. O vértice V é da forma $(k,2k,k)$ e pertence ao plano BVD de equação $x+y-4z+1=0$.

Então, $k+(2k)-4k+1=0 \Leftrightarrow -k+1=0 \Leftrightarrow k=1$.

Logo, $V(1,\ 2,1)$.

2.3. $A(-2,\ -1,\ 4)$ e $C(0,\ 1,\ -4)$

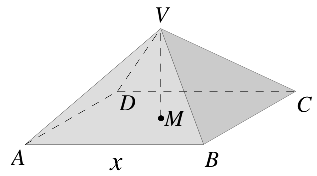
$M\left(\dfrac{-2+0}{2},\dfrac{-1+1}{2},\dfrac{4-4}{2}\right)$, ou seja, $M(-1,0,0)$

$\overrightarrow{MV}=V-M=(1,2,1)-(-1,0,0)=(2,2,1)$

Uma equação vetorial da reta MV é $(x,\ y,z)=(-1,0,0)+k(2,2,1),\ k\in\mathbb{R}$.

2.4. $A(-2, -1, 4)$ e $C(0, 1, -4)$

A base da pirâmide é um quadrado de lado x.



$x^2 + x^2 = \overline{AC}^{\,2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 = \left(\sqrt{(0+2)^2 + (1+1)^2 + (-4-4)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 4+4+64 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{72}{2} \Leftrightarrow x^2 = 36$

Área da base da pirâmide = $x^2 = 36$

Já vimos que $\overrightarrow{MV}(2, 2, 1)$.

Altura da pirâmide $= \|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \dfrac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$ u.v.

2.5. O centro da superfície esférica é o ponto E, do eixo Ox, tal que $d(A, E) = d(C, E)$. Portanto, o ponto E é o ponto de interseção do eixo Ox com o plano mediador de $[AC]$, ou seja, com o plano BVD definido por $x + y - 4z + 1 = 0$.

$E(x, 0, 0)$

$x + 0 - 4 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$E(-1, 0, 0)$

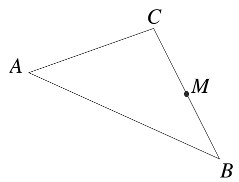
Raio da superfície esférica: $r = \overline{AE}$

$r = \sqrt{(-1+2)^2 + (0+1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$

Equação pedida:

$(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 18$

3. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ e $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$, vem:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}\right)$

Dado que M é o ponto médio de $[BC]$, temos $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MB}$.

Assim, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} =$

$= 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB} =$

$= 2\overrightarrow{AM}$

Portanto, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.