.

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

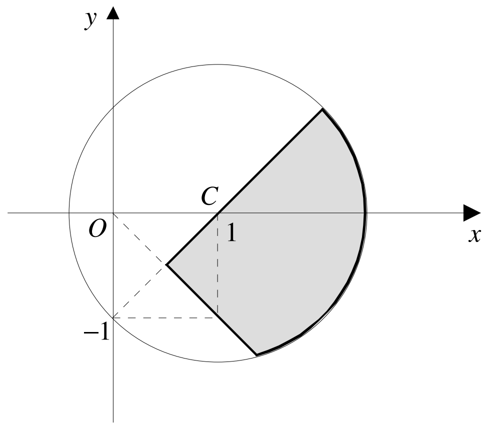
Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Sabe-se que, para determinado valor real de k , não nulo, o polinómio $A(x) = x^3 + 3x^2 + x + k$ é divisível pelo polinómio $B(x) = x + k$.

Qual é o valor de k ?

(A) 3 **(B)** -3 **(C)** -2 **(D)** -1

2. Na figura está representada, num referencial ortonormado xOy , uma circunferência de centro no ponto $C(1, 0)$.



Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge -x \leq y \leq x-1$

(B) $(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge -x-1 \leq y \leq x$

(C) $(x-1)^2 + y^2 \leq 2 \wedge -x \leq y \leq x-1$

(D) $(x-1)^2 + y^2 \leq 2 \wedge -x-1 \leq y \leq x$

3. Considere, num referencial ortonormado xOy , a circunferência de equação:

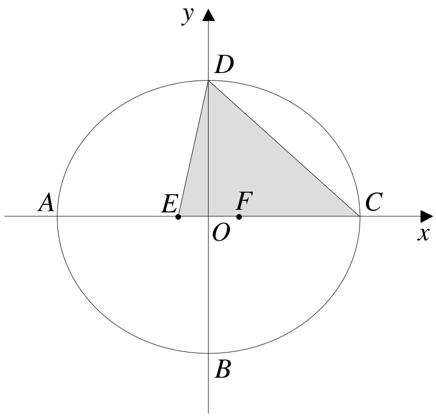
$$x^2 + y^2 + 2x = 0$$

Qual das equações seguintes define uma reta que passa no centro desta circunferência?

(A) $x = 1$ **(B)** $y = -1$

(C) $y = x + 1$ **(D)** $y = -x + 1$

4. No referencial ortonormado xOy da figura está representada a elipse de centro na origem e focos E e F pertencentes ao eixo Ox.



Tal como a figura sugere, a elipse interseta o eixo Ox nos pontos A e C e o eixo Oy nos pontos B e D.
Sabe-se que $\overline{ED}=10$ e $\overline{EF}=4$.

Na unidade considerada, o perímetro do triângulo $[DEC]$ é igual a:

(A) 36 **(B)** 34

(C) $24+\sqrt{96}$ **(D)** 32

5. Num referencial ortonormado xOy, considere o quadrado $[ABCD]$ e os vetores $\vec{u}(3\,,2)$ e $\vec{v}(-5\,,1)$.

Sabe-se que:

- a origem, O, do referencial é o ponto de interseção das diagonais do quadrado;
- $A=O+\vec{u}$;
- $B=A+\vec{v}$.

As coordenadas dos vértices C e D são, respetivamente:

(A) $(-3\,,-2)$ e $(5\,,-1)$ **(B)** $(-3\,,-2)$ e $(2\,,-3)$

(C) $(-2\,,-3)$ e $(3\,,-2)$ **(D)** $(2,3)$ e $(-3\,,2)$

Grupo II

1. Num plano munido de um referencial ortonormado $(O\,,\vec{e_1}\,,\vec{e_2})$, considere o ponto $A(0\,,2)$ e o vetor $\vec{u}(4\,,-3)$.

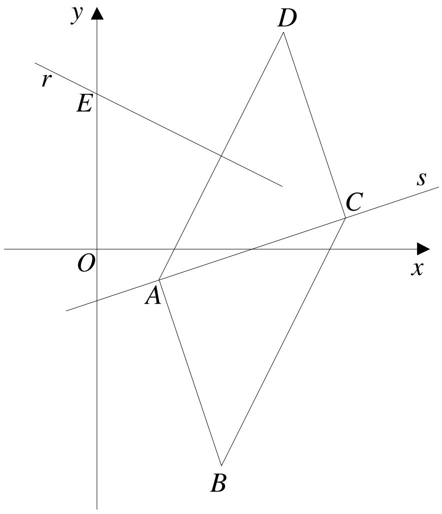
Seja r a reta que passa no ponto A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

1.1. Escreva um sistema de equações paramétricas da reta r.

1.2. Determine a abcissa do ponto da reta r com ordenada nula.

1.3. Determine as coordenadas do ponto da reta r, de abcissa positiva, cuja distância ao ponto A é igual a 10.

2. No referencial ortonormado xOy da figura estão representados o paralelogramo $[ABCD]$, a reta r e a reta s.



Sabe-se que:

- os pontos A e D têm coordenadas $(2,-1)$ e $(6,7)$, respetivamente;
- o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(2,-6)$;
- a reta r é a mediatriz do segmento de reta $[AD]$ e interseta o eixo Oy no ponto E;
- a reta s passa nos pontos A e C.

2.1. Mostre que $y=-\frac{1}{2}x+5$ é a equação reduzida da reta r.

2.2. Determine uma equação cartesiana da circunferência de diâmetro $[AD]$ e verifique que o ponto E pertence a essa circunferência.

2.3. Mostre que o ponto C tem coordenadas $(8,1)$.

2.4. Determine uma equação vetorial da reta s.

2.5. Verifique que o ponto C pertence à reta r.

2.6. Determine a medida da área do paralelogramo $[ABCD]$.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
10	10	10	10	10	**50**

Grupo II

1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	2.3.	2.4.	2.5.	2.6.	Total
15	15	20	20	15	15	15	15	20	**150**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $A(x)=x^3+3x^2+x+k$

Se $A(x)$ é divisível pelo polinómio $B(x)=x+k$, então: $A(-k)=0$

$A(-k)=0 \wedge k\neq 0 \Leftrightarrow (-k)^3+3(-k)^2+(-k)+k=0 \wedge k\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -k^3+3k^2-k+k=0 \wedge k\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2(-k+3)=0 \wedge k\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k=0 \vee -k+3=0) \wedge k\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=3$

Resposta: (A)

2. Equação da circunferência:

Centro: $C(1\,,0)$

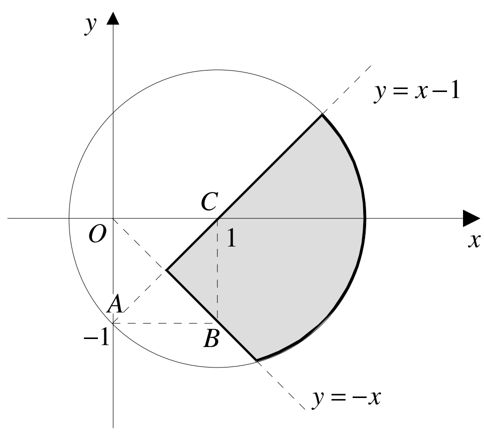
Raio: $\overline{AC}$

Considerando o triângulo $[OAC]$ e pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2=\overline{OC}^2+\overline{OA}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=1^2+1^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=2$

Equação: $(x-1)^2+y^2=2$



Reta OB sendo $B(1\,,-1)$: $y=-x$

Reta AC sendo $A(0\,,-1)$ e $C(1\,,0)$: $y=mx+b$

$m=\dfrac{0-(-1)}{1-0}=1$

$b=-1$ (ordenada de A)

Equação: $y=x-1$

Condição pedida: $(x-1)^2+y^2\leq 2 \wedge -x\leq y\leq x-1$

Resposta: (C)

3. $x^2+y^2+2x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1$

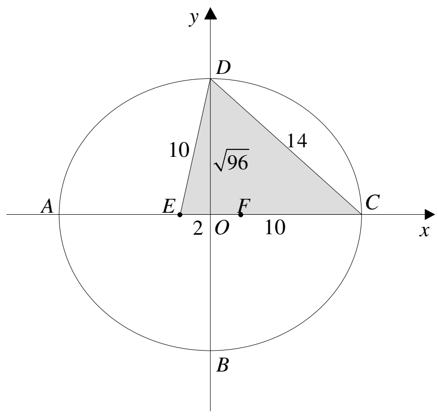
O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(-1\,,0)$. As coordenadas deste ponto apenas verificam a equação $y=x+1$.

Resposta: (C)

4. $\overline{DE}+\overline{DF}=2a \Leftrightarrow$ (definição de elipse)

$\Leftrightarrow \overline{DE}+\overline{DE}=2a \Leftrightarrow$ ($\overline{DF}=\overline{DE}$)

$\Leftrightarrow 10+10=2a \Leftrightarrow a=10$ ($\overline{ED}=10$)



$\overline{EF}=4 \Leftrightarrow 2c=4 \Leftrightarrow c=2$

Considerando o triângulo $[DEF]$ e pelo Teorema de Pitágoras:

$a^2=b^2+c^2$

$10^2=b^2+2^2 \Leftrightarrow b^2=100-4 \Leftrightarrow b=\sqrt{96}$

Portanto, $\overline{OD}=b=\sqrt{96}$.

$\overline{OC}=a=10$

Considerando o triângulo $[OCD]$ e pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{DC}^2=\overline{OD}^2+\overline{OC}^2$

$\overline{DC}^2=\left(\sqrt{96}\right)^2+10^2 \Leftrightarrow \overline{DC}^2=96+100 \Leftrightarrow \overline{DC}=\sqrt{196} \Leftrightarrow \overline{DC}=14$

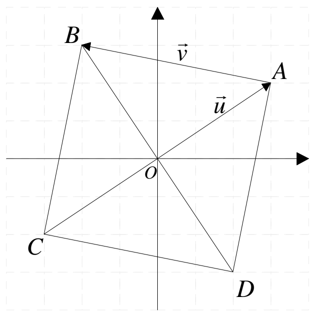
$\text{Perímetro}_{[DEC]}=\overline{DE}+\overline{EO}+\overline{OC}+\overline{DC}=10+2+10+14=36$

Resposta: (A)

5. $\vec{u}(3\,,2)$ e $\vec{v}(-5\,,1)$

$A=O+\vec{u}=(0\,,0)+(3\,,2)=(3\,,2)$

$B=A+\vec{v}=(3\,,2)+(-5\,,1)=(-2\,,3)$



Como a origem, O, é o ponto de interseção das diagonais do quadrado, tem-se:

- o ponto C é a imagem do ponto A pela reflexão central de centro O, pelo que, se A tem coordenadas $(3\,,2)$, C tem coordenadas $(-3\,,-2)$;
- o ponto D é a imagem do ponto B pela reflexão central de centro O, pelo que, se B tem coordenadas $(-2\,,3)$, D tem coordenadas $(2\,,-3)$.

Resposta: (B)

Grupo II

1. $A(0\,,2)$ e $\vec{u}(4\,,-3)$

1.1. Equação vetorial de $r:(x\,,y)=(0\,,2)+k(4\,,-3)\,,k\in\mathbb{R}$

Equações paramétricas de r: $x=4k \wedge y=2-3k\,,k\in\mathbb{R}$

1.2. $B(x,0)$

$x=4k \wedge 0=2-3k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4k \wedge 3k=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=4\times\frac{2}{3} \wedge k=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

O ponto da reta com ordenada nula tem abcissa igual a $\frac{8}{3}$.

1.3. Qualquer ponto P da reta r é da forma $(x\,,\,y)=(4k\,,\,2-3k)\,,\,k\in\mathbb{R}$

Pretendemos determinar as coordenadas de P, de abcissa positiva, tal que $d(A\,,\,P)=10$.

$A(0\,,2)$

$P(4k\,,2-3k)\,,\,k\in\mathbb{R}$

$d(A\,,\,P)=10 \Leftrightarrow \sqrt{(4k-0)^2+(2-3k-2)^2}=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4k)^2+(-3k)^2=10^2 \Leftrightarrow 16k^2+9k^2=100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25k^2=100 \Leftrightarrow k^2=4 \Leftrightarrow k=-2 \vee k=2$

Se $k=-2$, vem $(4k\,,2-3k)=(4\times(-2)\,,\,2-3\times(-2))=(-8\,,8)$

Se $k=2$, vem $(4k\,,2-3k)=(4\times 2\,,\,2-3\times 2))=(8\,,-4)$

O ponto da reta r, com abcissa positiva cuja distância ao ponto A é igual a 10, tem coordenadas $(8\,,-4)$.

2. $A(2\,,-1)$, $D(6\,,7)$ e $\overrightarrow{AB}(2\,,-6)$

2.1. Seja $P(x\,,\,y)$ um ponto da mediatriz de $[AD]$.

$d(P\,,A)=d(P\,,D)$, donde:

$(x-2)^2+(y+1)^2=(x-6)^2+(y-7)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=x^2-12x+36+y^2-14y+49 \Leftrightarrow$

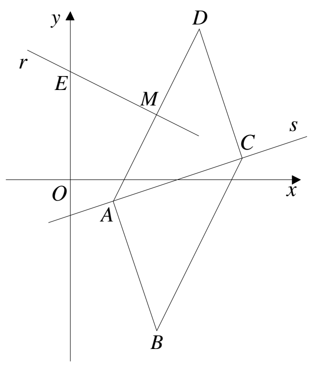
$\Leftrightarrow 2y+14y=-12x+4x+36+49-4-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16y=-8x+80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{8}{16}x+\frac{80}{16} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+5$

Portanto, $y=-\frac{1}{2}x+5$ é a equação reduzida da reta r.

2.2. O centro da circunferência de diâmetro $[AD]$ é M, ponto médio de $[AD]$.



$A(2\,,-1)$, $D(6\,,7)$

$M\left(\frac{2+6}{2}\,,\frac{-1+7}{2}\right)=(4\,,3)$

O raio da circunferência é:

$r=\overline{AM}=\sqrt{(4-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

Equação da circunferência: $(x-4)^2+(y-3)^2=20$

Como $y=-\frac{1}{2}x+5$ é a equação reduzida da reta s, o ponto E tem coordenadas $(0\,,5)$.

Substituindo na equação da circunferência: $(0-4)^2+(5-3)^2=20 \Leftrightarrow 16+4=20$

Dado que obtivemos uma proposição verdadeira, podemos concluir que o ponto E pertence a essa circunferência.

2.3. Como $[ABCD]$ é um paralelogramo, tem-se:

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (2, -6)$

$C = D + \overrightarrow{DC} = (6, 7) + (2, -6) = (8, 1)$

2.4. $A(2, -1)$ e $C(8, 1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (8, 1) - (2, -1) = (8-2, 1+1) = (6, 2)$

Como $\overrightarrow{AC}$ é um vetor diretor da reta AC, uma equação vetorial desta reta é:

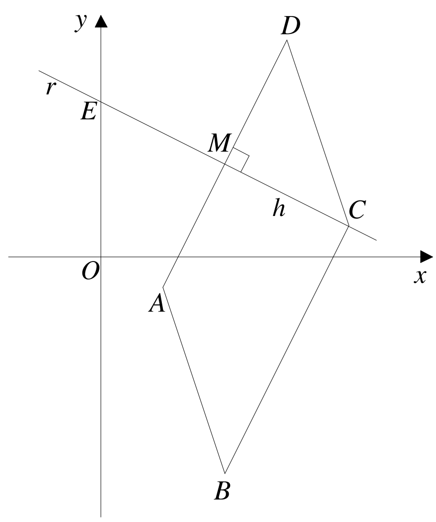
$(x, y) = (2, -1) + k(6, 2), k \in \mathbb{R}$

2.5. $r: y = -\frac{1}{2}x + 5$ e $C(8, 1)$

$1 = -\frac{1}{2} \times 8 + 5 \Leftrightarrow 1 = -4 + 5 \Leftrightarrow 1 = 1$

Como a proposição obtida é verdadeira, o ponto C pertence à reta r.

2.6. A mediatriz, r, do segmento de reta $[AD]$ é perpendicular a esse segmento no ponto médio, M. Assim, como o ponto C também pertence a r, a altura do paralelogramo relativa ao lado $[AD]$ é $[MC]$, pelo que a área do paralelogramo $[ABCD]$ é igual a $\overline{AD} \times \overline{MC}$.



$A(2, -1)$; $D(6, 7)$; $M(4, 3)$ e $C(8, 1)$

$\overline{AD} = \sqrt{(6-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} =$

$= \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$

$\overline{MC} = \sqrt{(8-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} =$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$A_{\text{paralelogramo}} = \overline{AD} \times \overline{MC} = 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 8 \times 5 = 40$ u.a.