Proposta de teste de avaliação

Matemática A

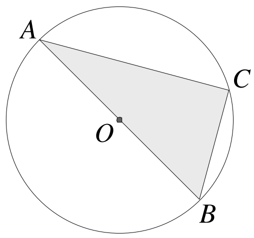
10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$ inscrito numa circunferência de centro O e raio $\sqrt{2}$.



Sabe-se que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência e que $\overline{BC} = \overline{OB}$.

A medida da área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

(A) $\sqrt{3}$ **(B)** $\sqrt{6}$ **(C)** 2 **(D)** 1

2. Para cada valor real de p, a expressão:

$$P(x) = 4x^3 + px^2 + 2$$

é um polinómio do 3.º grau.

Sabendo que o polinómio é divisível por $2x+2$, o valor de p é:

(A) $-\frac{17}{2}$ **(B)** $\frac{15}{2}$ **(C)** 2 **(D)** -6

3. O resto da divisão inteira do polinómio $P(x) = x^{100} - x + 1$ pelo polinómio $A(x) = x+1$ é:

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** 3

4. Sejam $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ polinómios na variável x, tais que $Q(x)$ e $R(x)$ são, respetivamente, o polinómio-quociente e o polinómio-resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

Sabe-se que o polinómio $A \times B$ tem grau 8 e o polinómio Q tem grau 2.

Qual é o grau do polinómio $(A-B)^2$?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10

5. Considere, num referencial ortonormado xOy, o ponto P de coordenadas $(1, k)$.

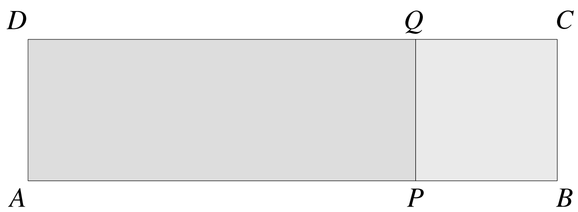
Sabe-se que o ponto P pertence ao 4.º quadrante e que a distância de P à origem do referencial é igual a 2.

O valor de k é:

(A) $-\sqrt{3}$ **(B)** $\sqrt{3}$ **(C)** -1 **(D)** 1

Grupo II

1. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- a medida da área do retângulo $[ABCD]$ é igual a 2;
- os pontos P e Q pertencem aos lados $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente, de tal forma que $\overline{AP} = 2$ e $[PBCQ]$ é um quadrado.

1.1. Mostre que $\overline{AD} = \sqrt{3} - 1$.

1.2. Determine $\overline{AC}$. Apresente o resultado na forma $a\sqrt{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

2. Considere os polinómios $A(x) = 4x^4 - 6x^2 + 1$ e $B(x) = 2x^2 - 4x$.

2.1. Determine o polinómio-quociente e o polinómio-resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

2.2. De um polinómio $P(x)$, sabe-se que da sua divisão por $B(x)$ se obtém o polinómio-quociente $Q(x) = x^2 - 1$ e o polinómio-resto $R(x) = -4x$.

Determine $P(x)$ na forma de um polinómio reduzido.

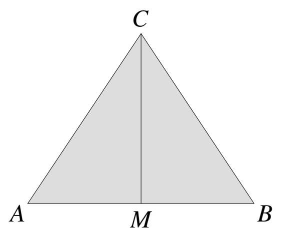
3. Considere o polinómio $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$.

3.1. Verifique que $P(2)=0$.

3.2. Fatorize $P(x)$.

3.3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $P(x)\geq 0$.

4. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC}=\overline{BC}$
- M é o ponto médio de $[AB]$.

As expressões $A(x)=x^3-3x^2+4$ e $B(x)=x+1$ representam, para determinados valores de x, a medida da área do triângulo $[ABC]$ e a medida do lado $[AB]$, respetivamente.

Determine uma expressão $H(x)$ que represente a medida de $[MC]$.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
10	10	10	10	10	**50**

Grupo II

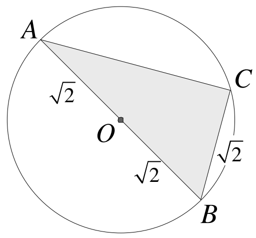
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	Total
20	20	20	15	15	20	20	20	**150**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

Logo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.



$\overline{BC} = \overline{OB} = \sqrt{2}$

$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$

Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \overline{AC}^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 8 = \overline{AC}^2 + 2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 6$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = \sqrt{6}$.

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: (A)

2. $P(x) = 4x^3 + px^2 + 2$

$2x + 2 = 2(x+1)$

$P(-1) = 0 \Leftrightarrow 4(-1)^3 + p(-1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -4 + p + 2 = 0 \Leftrightarrow p = 2$

Resposta: (C)

3. $P(x) = x^{100} - x + 1$; $A(x) = x + 1$

O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x+1$ é igual a $P(-1)$.

$P(-1) = (-1)^{100} - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

Resposta: (D)

4. Seja a o grau do polinómio $A(x)$ e b o grau de $B(x)$.

Se o polinómio $A \times B$ tem grau 8, então $a + b = 8$.

Se o polinómio-quociente da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ tem grau 2, então $a - b = 2$.

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + b + b = 8 \\ a = 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 6 \\ a = 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases}$$

Se $A(x)$ tem grau 5 e $B(x)$ tem grau 3, então o polinómio $A - B$ tem grau 5.

Logo, $(A-B)^2 = (A-B) \times (A-B)$ tem grau: $5 + 5 = 10$

Resposta: (D)

5. O ponto P pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2.

Uma equação que define a circunferência é $x^2 + y^2 = 2^2$.

Substituindo as coordenadas de $P(1, k)$ nesta equação, temos:

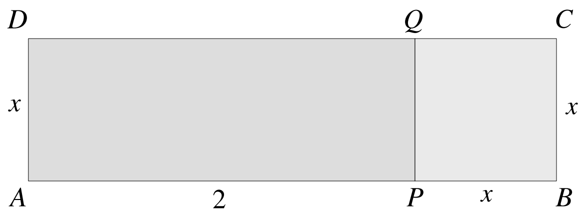
$1^2 + k^2 = 2^2 \Leftrightarrow k^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$

Como o ponto P pertence ao 4.º quadrante, a sua ordenada é negativa. Logo, $k = -\sqrt{3}$.

Resposta: (A)

Grupo II

1.



1.1. Seja $\overline{PB} = x$

Como $[PBCQ]$ é um quadrado temos

$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PB} = x$.

Sabe-se que $\overline{AP} = 2$.

A medida da área do retângulo $[ABCD]$, que sabemos ser igual a 2, é dada por:

$\overline{AD} \times \overline{AB} = x(2 + x) = 2x + x^2$

$2x + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2(-1 \pm \sqrt{3})}{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Como $x = \overline{PB}$, vem $x > 0$. Logo, $x = -1 + \sqrt{3}$.

$\overline{AD} = x = \sqrt{3} - 1$

1.2. Pelo Teorema de Pitágoras: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AB} = 2 + x = 2 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} + 1$

$\overline{BC} = x = \sqrt{3} - 1$

$\overline{AC}^2 = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 3 + 1 + 3 + 1 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 8$$

Dado que $\overline{AC} > 0$, $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2.

2.1. $A(x)=4x^4-6x^2+1$; $B(x)=2x^2-4x$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4x^4 & +0x^3 & -6x^2 & +0x & +1 & 2x^2-4x \\ \cline{6-6} -4x^4 & +8x^3 & & & & 2x^2+4x+5 \\ \cline{1-5} & 8x^3 & -6x^2 & +0x & +1 & \\ & -8x^3 & +16x^2 & & & \\ \cline{2-5} & & 10x^2 & +0x & +1 & \\ & & -10x^2 & +20x & & \\ \cline{3-5} & & & 20x & +1 & \end{array}$$

Polinómio-quociente: $2x^2+4x+5$

Polinómio-resto: $20x+1$

2.2. $Q(x)=x^2-1$; $R(x)=-4x$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$P(x)=B(x)\times Q(x)+R(x)$

$P(x)=\left(2x^2-4x\right)\times\left(x^2-1\right)+(-4x)=$

$=2x^4-2x^2-4x^3+4x-4x=2x^4-4x^3-2x^2$

$P(x)=2x^4-4x^3-2x^2$

3. $P(x)=x^3-4x^2+5x-2$

3.1. $P(2)=2^3-4\times2^2+5\times2-2=8-16+10-2=0$

3.2. Como $P(2)=0$, $P(x)$ é divisível por $x-2$.

Usando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 2 & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \underline{|0} \end{array}$$

$P(x)=(x-2)\left(x^2-2x+1\right)=(x-2)(x-1)^2$

3.3. $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2 \geq 0$

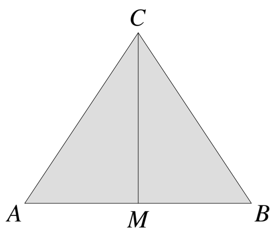
- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{1\} \cup [2, +\infty[$

$S = \{1\} \cup [2, +\infty[$

4. $A(x) = x^3 - 3x^2 + 4$; $B(x) = x + 1$



Área de $[ABC] = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{MC}}{2}$

$A(x) = \dfrac{B(x) \times H(x)}{2}$

$x^3 - 3x^2 + 4 = \dfrac{(x+1) \times H(x)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1) \times H(x) = 2\left(x^3 - 3x^2 + 4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(x) = \dfrac{2\left(x^3 - 3x^2 + 4\right)}{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(x) = 2 \times \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(x) = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H(x) = 2x^2 - 8x + 8$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$