Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. O valor de $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}}$ é igual a:

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) $\dfrac{1}{2}$ (**D**) $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3}$

2. Para qualquer número natural n, a expressão $\dfrac{3}{9^{-n}}$ é igual a:

(**A**) 3^{2n+1} (**B**) 27^{n} (**C**) $3\times 3^{n+2}$ (**D**) 3^{n}

3. Considere as proposições seguintes:

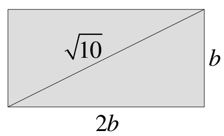
$a:\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq 2x$

$b:\ \exists x\in\mathbb{R}:\ x+1=2x$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(**A**) $a\Leftrightarrow b$ (**B**) $a\vee \sim b$ (**C**) $a\Rightarrow b$ (**D**) $\sim a\wedge \sim b$

4. Relativamente ao retângulo da figura sabe-se que a medida da diagonal é igual a $\sqrt{10}$ e o comprimento é o dobro da largura.



Designando por P o perímetro e por A a área do retângulo, nas correspondentes unidades, pode-se afirmar que:

(**A**) $P=6\sqrt{2}$ e $A=2$ (**B**) $P=3\times 2^{\frac{3}{2}}$ e $A=2^{2}$

(**C**) $P=3\times 2^{\frac{1}{2}}$ e $A=4$ (**D**) $P=3\sqrt{2}+\sqrt{10}$ e $A=2^{2}$

5. Seja a um número real positivo qualquer.

O valor de $\sqrt{a^{\frac{5}{2}}}$ é igual a:

(**A**) $\sqrt[5]{a^{4}}$ (**B**) $a^{2}\sqrt{a}$ (**C**) $a^{\frac{25}{4}}$ (**D**) $a\sqrt[4]{a}$

Grupo II

1. Verifique que o número $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ é uma solução da equação seguinte:

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

2. Racionalize o denominador da fração seguinte:

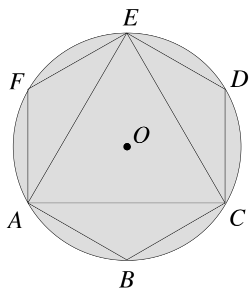
$$\frac{\sqrt{6}}{3 + 2\sqrt{3}}$$

3. Simplifique as expressões seguintes:

3.1. $3\sqrt{48} + 6\sqrt{\frac{25}{3}} - 4\sqrt{75}$

3.2. $\frac{10}{\sqrt[3]{27}} \times \frac{3}{\sqrt[3]{40}} - \sqrt[3]{\frac{1}{5}} + \frac{5}{2} \times \left(\frac{8}{25^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. Na figura estão representados o hexágono regular $[ABCDEF]$ e o triângulo $[ACE]$ inscritos numa circunferência de centro O.



Sabe-se que o círculo limitado pela circunferência tem área igual a 2π.

4.1. Justifique que a medida do lado do hexágono é igual a $\sqrt{2}$.

4.2. Mostre que a medida da área do hexágono é igual a $3^{\frac{3}{2}}$.

4.3. Justifique que o triângulo $[ACE]$ é equilátero.

4.4. Justifique que a medida da altura do triângulo $[ACE]$ é igual a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e determine $\overline{AC}$.

4.5. Determine a medida da área do triângulo e $[ACE]$ e justifique que é igual a metade da medida da área do hexágono.

FIM

Cotações

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	4.4.	4.5	Total
15	20	20	20	15	20	15	20	15	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2\times 4}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{2}{2}=1$

Resposta: (A)

2. $\dfrac{3}{9^{-n}}=3\times 9^n=3\times\left(3^2\right)^n=3^1\times 3^{2n}=3^{2n+1}$

Resposta: (A)

3. $a:\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq 2x$

$b:\ \exists x\in\mathbb{R}:\ x+1=2x$

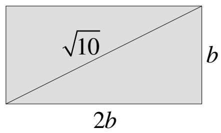
A proposição a é falsa. Para $x=0$, temos $0=2\times 0$ que é verdadeiro.

A proposição b é verdadeira. Para $x=1$, temos $1+1=2\times 1$ que é verdadeiro.

Se a é falsa e b é verdadeira, então $a\Rightarrow b$.

Resposta: (C)

4. Pelo Teorema de Pitágoras:



$(2b)^2+b^2=\left(\sqrt{10}\right)^2\Leftrightarrow 4b^2+b^2=10\Leftrightarrow 5b^2=10\Leftrightarrow b^2=2\overset{b>0}{\Leftrightarrow} b=\sqrt{2}$

$b=\sqrt{2}$; $2b=2\sqrt{2}$

$P=2\times\left(2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}=3\times 2\times 2^{\frac{1}{2}}=3\times 2^{1+\frac{1}{2}}=3\times 2^{\frac{3}{2}}$

$A=2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2\times 2=2^2=4$

Resposta: (B)

5. $\sqrt{a^{\frac{5}{2}}}=\left(a^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{4}}=a^{1+\frac{1}{4}}=a\times a^{\frac{1}{4}}=a\sqrt[4]{a}$

Resposta: (D)

Grupo II

1. $x^3-3x^2+x+1=0$; $x_0=1-\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})^3-3(1-\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})+1=$

$=(1-\sqrt{2})^2\times(1-\sqrt{2})-3(1-2\sqrt{2}+2)+2-\sqrt{2}=$

$=(3-2\sqrt{2})\times(1-\sqrt{2})-3\times(3-2\sqrt{2})+2-\sqrt{2}=$

$=3-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2\times2-9+6\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=$

$=-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3+4+2-9=0$

Assim, $x_0=1-\sqrt{2}$ é uma solução da equação dada.

2. $\dfrac{\sqrt{6}}{3+2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}\times(3-2\sqrt{3})}{(3+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3})}=\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{6}\sqrt{3}}{3^2-(2\sqrt{3})^2}=$

$=\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{18}}{3^2-4\times3}=\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{9\times2}}{9-12}=$

$=\dfrac{3\sqrt{6}-2\times3\sqrt{2}}{-3}=\dfrac{-3(-\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{-3}=$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

3.

3.1. $3\sqrt{48}+6\sqrt{\dfrac{25}{3}}-4\sqrt{75}=$

$=3\sqrt{16\times3}+2\times3\times\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{3}}-4\sqrt{25\times3}=$

$=3\times4\sqrt{3}+2\times3\times\dfrac{5}{\sqrt{3}}-4\times5\sqrt{3}=$

$=12\sqrt{3}-20\sqrt{3}+2\times3\times\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=$

$=-8\sqrt{3}+2\times3\times\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=$

$=-8\sqrt{3}+10\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

3.2. $\frac{10}{\sqrt[3]{27}}\times\frac{3}{\sqrt[3]{40}}-\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+\frac{5}{2}\times\left(\frac{8}{25^2}\right)^{\frac{1}{3}}=$

$$=\frac{10}{3}\times\frac{3}{\sqrt[3]{2^3\times 5}}-\left(5^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{2}\times\left(\frac{2^3}{\left(5^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=10\times\frac{1}{\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{5}}-5^{-\frac{1}{3}}+\frac{5}{2}\times\frac{\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(5^4\right)^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{10}{2\times\sqrt[3]{5}}-5^{-\frac{1}{3}}+\frac{2^1}{2}\times\frac{5^1}{5^{\frac{4}{3}}}=$$

$$=5\times\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}-5^{-\frac{1}{3}}+5^{1-\frac{4}{3}}=$$

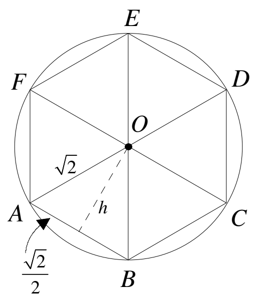
$$=5^1\times 5^{-\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}}+5^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=5^{1-\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$$

4.

4.1. Área do círculo $=2\pi$



$2\pi=\pi\times r^2 \Leftrightarrow r^2=2 \overset{r>0}{\Leftrightarrow} r=\sqrt{2}$

Como o hexágono é regular, $\overline{AB}=\overline{OA}=r=\sqrt{2}$.

Logo, a medida do lado do hexágono é $\sqrt{2}$.

4.2. Seja h a altura do triângulo equilátero $[OAB]$.

$$h^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow h^2=2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow h^2=\frac{3}{2} \overset{h>0}{\Leftrightarrow}$$

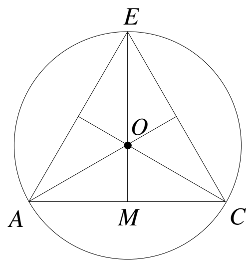
$$\Leftrightarrow h=\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Área}_{[OAB]}=\frac{\overline{AB}\times h}{2}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{4}=\frac{\sqrt{4\times 3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área}_{\text{Hexágono}}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\times\sqrt{3}=3\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{1+\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$$

4.3. Os ângulos ao centro AOC, COE e EOA são iguais (têm amplitude igual a $2\times 60^{\circ}$ porque o hexágono é regular). Logo, as cordas determinadas por estes ângulos são iguais pelo que o triângulo $\left[ACE\right]$ é equilátero.

4.4. O ponto O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo $\left[ACE\right]$. Como o triângulo é equilátero este ponto também é o ponto de interseção das medianas. Logo, sendo M o ponto médio de $\left[AC\right]$,



$\overline{OE}=\frac{2}{3}\overline{EM}$.

Como $\overline{OE}=\sqrt{2}$, então $\sqrt{2}=\frac{2}{3}\overline{EM}\Leftrightarrow \overline{EM}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\Leftrightarrow \overline{EM}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Assim, a altura do triângulo $\left[ACE\right]$ é igual a $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Seja $\overline{AC}=a$.

Então, $\overline{AE}=\overline{AC}=a$ e $\overline{AM}=\frac{a}{2}$.

$$\overline{AE}^2=\overline{AM}^2+\overline{ME}^2$$

$$a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\Leftrightarrow a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{18}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{4}=\frac{18}{4}\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{3}\times\frac{18}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2=6\overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\sqrt{6}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{6}$$

4.5. $$\text{Area}_{[ACE]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{ME}}{2}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{12}}{4}=\frac{3\times\sqrt{4\times 3}}{4}=$$

$$=\frac{3\times 2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{3\times 3^{\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}\times 3^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\times\text{Área}_{\text{hexágono}}$$