1.

1.1. O simétrico do ponto $\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$ em relação à reta $x=1$ é o ponto de coordenadas $\left(1-(\pi-1),\ -\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $\left(2-\pi\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$, que pertence ao conjunto A.

Resposta: (A) $\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$

1.2. O ponto $S\left(3-2k\,,\ \frac{1}{2}-\frac{k+1}{3}\right)$ pertence ao conjunto A se e só se $3-2k \leq 2 \wedge \frac{1}{2}-\frac{k+1}{3} \geq -1$.

$3-2k \leq 2\ \wedge\ \frac{1}{2}-\frac{k+1}{3} \geq -1\ \Leftrightarrow\ -2k \leq -1\ \wedge 3-2k-2 \geq -6\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ k \geq \frac{1}{2}\ \wedge\ -2k \geq -7\ \ \Leftrightarrow\ \ k \geq \frac{1}{2}\ \wedge\ k \leq \frac{7}{2}$

Resposta: $k \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$

1.3. Centro da circunferência: $T(2,-1)$

Raio da circunferência: $\overline{OT}$

$\left(\overline{OT}\right)^2 = 1^2 + 2^2$. Daqui resulta que $\overline{OT} = \sqrt{5}$.

Equação da circunferência: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

Resposta: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

1.4. A bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela equação $y = x$.

A reta $y = x$ interseta a reta $x = 2$ no ponto R de coordenadas $(2,2)$.

A reta $y = x$ interseta a reta $y = -1$ no ponto S de coordenadas $(-1,-1)$.

O segmento de reta $[RS]$ é um dos lados do quadrado, sendo $\overline{RS} = \sqrt{(2+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{2\times 3^2} = 3\sqrt{2}$.

Seja P o perímetro do quadrado.

$P = 4\times\overline{RS} = 4\times 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$, como se pretendia provar.

2. Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = 12$

O raio da circunferência é $\sqrt{12}$, ou seja, $2\sqrt{3}$.

Assim, $B\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ e $C\left(0, -2\sqrt{3}\right)$.

O ponto A pertence à circunferência e tem ordenada 3.

$x^2 + 3^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Assim, $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$, pelo que $D\left(\sqrt{3}, -3\right)$.

Base maior do trapézio: $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$

Base menor do trapézio: $\overline{AD} = 6$

Altura do trapézio: $\sqrt{3}$

A medida da área do trapézio é dada por: $\dfrac{4\sqrt{3}+6}{2} \times \sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}+3\right) \times \sqrt{3} = 6 + 3\sqrt{3}$, como se queria demostrar.

3.1.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12z = -20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36 = -20 + 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 16$

Centro: $(0, 0, 6)$

Raio: 4

Resposta: Centro $(0, 0, 6)$ e raio 4

b) As coordenadas do ponto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3\right)$ são solução da equação

$x^2 + y^2 + z^2 - 12z = -20$, dado que $\sqrt{2}^2 + \sqrt{5}^2 + 3^2 - 12 \times 3 = 2 + 5 + 9 - 36 = -20$.

Resposta: (B) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3\right)$

c) $B(0, 0, z)$ tal que $0^2 + 0^2 + (z-6)^2 = 16 \;\wedge\; z < 6$

$(z-6)^2 = 16 \;\wedge\; z < 6 \;\Leftrightarrow\; (z - 6 = 4 \vee z - 6 = -4) \wedge z < 6 \;\Leftrightarrow\; z = 2$

Resposta: $B(0, 0, 2)$

d) O centro $(0, 0, 6)$ é o ponto médio de $[PQ]$, sendo $P\left(\sqrt{3}, -2, 9\right)$ e $Q(x, y, z)$.

Então, tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{3}}{2}=0 \\ \dfrac{y-2}{2}=0 \\ \dfrac{z+9}{2}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

A reta paralela a Oy que passa em $Q\left(-\sqrt{3},2,3\right)$ é definida por $x=-\sqrt{3} \ \wedge \ z=3$

Resposta: $x=-\sqrt{3} \ \wedge \ z=3$

3.2.

a) O ponto P tem coordenadas $(8,0)$.

Equação da circunferência de centro P e raio 4: $(x-8)^2+y^2=16$

Resposta: $(x-8)^2+y^2=16$

b) O triângulo $[OPT]$ é equilátero e a medida do lado é 8.

Seja h a altura do triângulo em relação ao lado $[OP]$.

$h^2+4^2=8^2 \Leftrightarrow h^2=48$

Assim, $h=\sqrt{48}$, ou seja, $4\sqrt{3}$, pelo que as coordenadas do ponto T são $\left(4,4\sqrt{3}\right)$.

Resposta: $T\left(4,\ 4\sqrt{3}\right)$

c) A ordenada de qualquer ponto da reta EF é igual a $4+4\sqrt{3}$, ou seja, $4\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Resposta: (C) $y=4\left(1+\sqrt{3}\right)$

4.1. Sabe-se que $E(0,0,6)$ e $B(6,0,0)$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[BE]$.

$\overline{PB}=\overline{PE}$, pelo que: $\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-6)^2}$

$x^2-12x+36+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2-12z+36 \Leftrightarrow -12x=-12z \Leftrightarrow x=z$

O plano mediador de $[BE]$ é definido pela equação $x=z$.

O ponto $M\left(k^2,7,-2k+3\right)$, $k\in\mathbb{R}$ pertence ao plano mediador de $[BE]$ se e só se

$k^2=-2k+3$.

$k^2=-2k+3 \Leftrightarrow k^2+2k-3=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow k=1 \vee k=-3$

Resposta: $k\in\{-3,1\}$

4.2. Seja V o volume do octaedro.

$$V = 2\times\left(\frac{1}{3}\times\left(\overline{BC}\right)^2\times\overline{OE}\right)$$

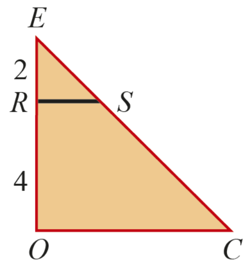
$$\overline{BC} = \sqrt{(6-0)^2+(0-6)^2+(0-0)^2} = \sqrt{72}$$

$$\overline{OE} = 6$$

Assim, $V = 2\times\left(\frac{1}{3}\times\left(\overline{BC}\right)^2\times\overline{OE}\right) = 2\times\left(\frac{1}{3}\times72\times6\right) = 288$.

Resposta: 288

4.3. Recorrendo ao esquema seguinte, os triângulos [*ERS*] e [*EOC*] são semelhantes.



Então, $\frac{\overline{RS}}{6} = \frac{2}{6}$. Daqui resulta que $\overline{RS} = 2$.

A metade da diagonal do quadrado resulta da interseção do plano $z = 4$ com o octaedro e mede 2. Logo, a diagonal mede 4.

Assim, designando por x o lado do quadrado, tem-se $x^2 + x^2 = 16$, ou seja, $x^2 = 8$, que corresponde à área do quadrado.

Resposta: 8