TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{i-1} = 2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + 2^{4-1} + 2^{5-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Assim, p é verdadeira.

$$\sum_{i=2013}^{2018} (i-1) = (2013-1) + (2014-1) + (2015-1) + (2016-1) + (2017-1) + (2018-1) =$$

$$= 12\,087$$

Assim, q é falsa.

2.

2.1. $f(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + (-1) + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$

Logo, –1 é zero de f.

$f(1) = 1^4 - 1^3 - 7 \times 1^2 + 1 + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$

Logo, 1 é zero de f.

2.2. Pretende-se determinar os valores de x para os quais $f(x) < 0$.

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - x - 6) =$$
$$= (x+1)(x-1)(x-3)(x+2)$$

Assim:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-3)(x+2) < 0$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\
-1 & & -1 & 2 & 5 & -6 \\
\hline
 & 1 & -2 & -5 & 6 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & -1 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \,]-2, -1[\, \cup \,]1, 3[$

2.3. $y_1 = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

$y_2 = -x$

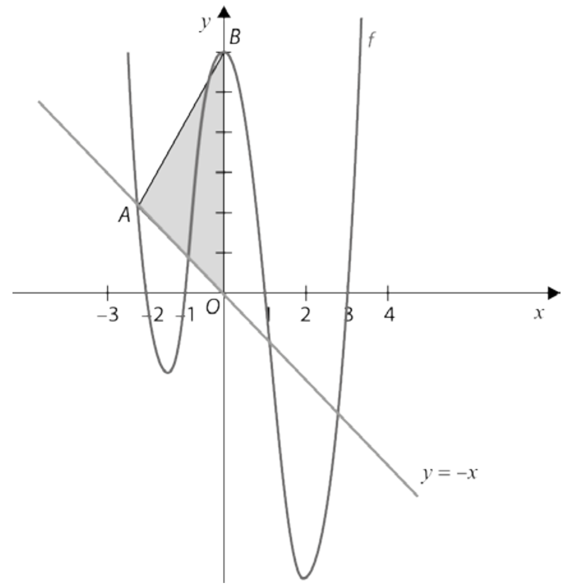
A(– 2,12; 2,12)

Seja $x_A = -2{,}12$.

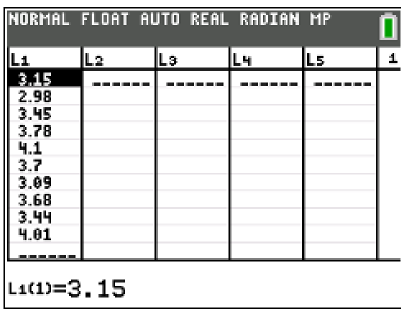
B(0, 6)

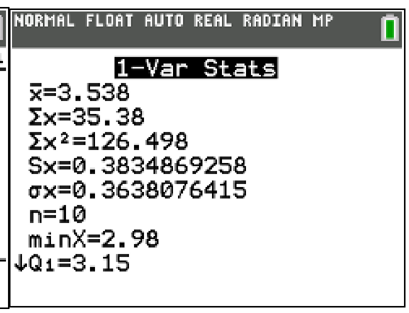
Assim, a área do triângulo [*OAB*] é igual a:

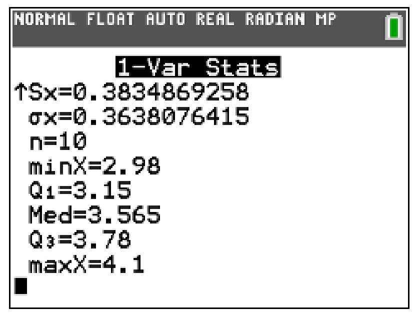
$\frac{\overline{OB} \times |x_A|}{2} \approx \frac{6 \times 2{,}12}{2} \approx 6{,}4$



3. Opção (A)







$\bar{x} = 3{,}538$ e $P_{50} = Med = 3{,}565$

4.

4.1. A área reservada ao texto é dada por:

$$A_{[EFGH]} = A_{[ABCD]} - 2A_{[GCF]} - 2A_{[EBF]} =$$

$$= 21 \times 10 - 2 \times \frac{(21-x)x}{2} - 2 \times \frac{(10-x)x}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$= 210 - 21x + x^2 - 10x + x^2 \text{ , } 0 < x < 10$$

$$= 2x^2 - 31x + 210 \text{ , } 0 < x < 10$$

4.2. $A(x) < 111 \ \wedge \ 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 31x + 210 < 111 \quad \wedge \quad 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 31x + 99 < 0 \quad \wedge \quad 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 4{,}5 < x < 11 \ \wedge \ 0 < x < 10$

$\Leftrightarrow 4{,}5 < x < 10$

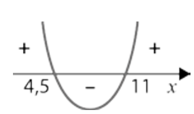
C.S. = $]4{,}5; \ 10[$

Cálculo auxiliar

$2x^2 - 31x + 99 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 4 \times 2 \times 99}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{31 \pm 13}{4}$

$\Leftrightarrow x = 11 \vee x = 4{,}5$



Caderno 2

5. Opção (A)

$$x^2+y^2-2x+2y\le 0 \ \wedge\ y\le -x \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2x+1}+\underbrace{y^2+2y+1}\le 1+1 \ \wedge\ y\le -x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2+(y+1)^2\le 2}_{\text{Círculo de centro (–1, 1) e raio } \sqrt{2}.} \ \wedge\ \underbrace{y\le -x}_{\text{Semiplano fechado inferior, determinado pela bissetriz dos quadrantes pares.}}$$

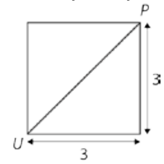
A área pretendida é, então, a área do semicírculo: $\frac{\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}=\pi$.

6.

6.1. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=18$

r = *d*(*U*, *P*) = $3\sqrt{2}$



6.2. A reta que passa pelo ponto *V* e é paralela ao eixo das cotas passa também, por exemplo, pelo centro do quadrado [*OPQN*], que tem de coordenadas $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)$.

Assim, uma equação vetorial da reta pretendida pode ser:

$$(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)+k(0,0,1), k\in\mathbb{R}$$

7. Opção (C)

- $(f\times g)(-1)=f(-1)\times g(-1)=-3\times k$, com $k>0$.

  Logo, $(f\times g)(-1)\neq 0$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{-3}{k}$, com $k>0$.

  Logo, $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)<0$.

  Assim, $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)\neq 3$.
- $(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(5)$ pois, como g é par, $g(3)=g(-3)=5$.

  $=2\times 5-1=9$
- $(f^{-1}+f)(3)=\underbrace{f^{-1}(3)}_{2x-1=3\Leftrightarrow x=2}+f(3)=2+5=7$

  Logo, $(f^{-1}+f)(3)\neq 0$.

8.

8.1.

8.1.1. Falso, pois, em $]-1,+\infty[$, tem-se que $f(x) < 0$.

8.1.2. Verdadeiro, pois em $\mathbb{R}^+$, f é estritamente decrescente.

8.2. $f(x) = \begin{cases} -2(x+4)^2+2 & \text{se} \quad x < -2 \\ -2 & \text{se} \quad -2 \leq x < 0 \\ -2x+2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

- Em $]-\infty,-2[$, f está definida por uma função quadrática cuja representação gráfica é uma parábola de vértice *V*(–4, 2) e que passa, por exemplo, no ponto de coordenadas (–3, 0):

  $y = a(x+4)^2+2$

  $0 = a(-3+4)^2+2$

  $\Leftrightarrow a = -2$

  Logo, $f(x) = -2(x+4)^2+2$, para $x < -2$.
- $f(x) = -2$, para $-2 \leq x < 0$.
- Em $]0,+\infty[$, f está definida por uma função afim cuja representação gráfica é uma reta de declive $\frac{2-0}{0-1} = -2$ e ordenada na origem 2.

  Logo, $f(x) = -2x+2$, para $x > 0$.

8.3. $p \Leftrightarrow V$, pois a objetos diferentes correspondem imagens diferentes.

$q \Leftrightarrow F$, pois $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 0$.

$r \Leftrightarrow F$, pois $(g \circ f)(0) = g(f(0))$ e $0 \notin D_f$. Logo, $0 \notin D_{g \circ f}$ e, portanto, $(g \circ f)(0)$ não está definida.

Assim:

$$\begin{aligned}(\sim q \vee r) \wedge (p \Rightarrow r) &\Leftrightarrow ((V \vee F) \wedge (V \Rightarrow F)) \\ &\Leftrightarrow (V \wedge F) \\ &\Leftrightarrow F\end{aligned}$$

9. Opção (D)

Em $\mathbb{R}$, seja A o conjunto-solução da condição $a(x)$ e seja B o conjunto-solução da condição $b(x)$:

(1) $\sqrt{x-2} = x-4 \Rightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)^2 = (x-4)^2$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x-2 = x^2-8x+16 \\ &\Leftrightarrow x^2-9x+18 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-4\times 18}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 6 \ \vee \ x = 3\end{aligned}$$

Verificação

- $x = 3$

$\sqrt{3-2} = 3 - 4 \Leftrightarrow 1 = -1$ proposição falsa

- $x = 6$

$\sqrt{6-2} = 6 - 4 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$

$\Leftrightarrow 2 = 2$ proposição verdadeira

Assim, $A = \{6\}$

(2) $|x-2| < |x-1| \Leftrightarrow |x-2|^2 < |x-1|^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 < (x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow -2x < -3$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

$B = \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Em $\mathbb{R}$:

Como $A \cap B \neq \emptyset$, então $a(x) \wedge b(x)$ não é uma condição impossível.

Como $A \cup B \neq \mathbb{R}$, então $a(x) \vee b(x)$ não é uma condição universal.

Como $\overline{A} \cup B = \mathbb{R}$, então $\sim a(x) \vee b(x)$ não é uma condição possível não universal.

Como $A \subset B$, então $a(x) \Rightarrow b(x)$ é uma condição universal.

10. Opção (B)

Sabe-se que f é ímpar, logo o gráfico de f é simétrico em relação à origem do referencial.

Assim, a representação gráfica da opção (D) não pode ser a representação gráfica da função f.

Sabe-se também que $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função bijetiva, ou seja, f é injetiva e sobrejetiva.

Assim, a representação gráfica da opção (A) não pode ser a representação gráfica da função f, pois nesta opção a função representada não é injetiva. A representação gráfica da opção (C) também não pode ser a representação gráfica da função f, pois nesta opção a função representada não é sobrejetiva, isto é, o contradomínio da função não coincide com o conjunto de chegada $\mathbb{R}$.

Logo, apenas a representação gráfica apresentada na opção (B) pode ser a representação gráfica da função f.