

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. No plano munido de um referencial o.n. xOy , considere a elipse definida por $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Seja F_1 o foco da elipse de abcissa positiva.

Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém F_1 pode ser:

(A) $(x, y) = (5, 0) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y) = (3, 0) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (5, 0) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (3, 0) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

2. Considere o polinómio $A(x) = -2x^3 + 5x^2 - x - 2$.

Sabendo que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x - 1$, determine os valores reais de x para os quais $-2x^3 + 5x^2 > x + 2$.

3. Considere, em \mathbb{R} , as condições $a(x): x^{2018} + 1 > 0$ e $b(x): x^{2017} < 0$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $a(x)$ é uma condição possível não universal e $b(x)$ é uma condição impossível.

(B) $a(x)$ é uma condição universal e $b(x)$ é uma condição possível não universal.

(C) $a(x)$ é uma condição possível não universal e $b(x)$ é uma condição possível não universal.

(D) $a(x)$ é uma condição universal e $b(x)$ é uma condição impossível.

4. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, os pontos $A(\sqrt{2}, -4)$ e $B(\sqrt{8}, -2)$ e as retas r e s definidas por $r: (x, y) = (-3, 6) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$ e $s: y = -2x$.

4.1. Determine um sistema de equações paramétricas da reta paralela à reta s e que contém o ponto médio de $[AB]$.

4.2. Considere I o ponto de interseção das retas r e s . Determine uma equação da circunferência tangente ao eixo das abcissas e de centro I .

4.3. Para cada $p \in \mathbb{R}$, considere o vetor $\vec{u}(p^2, p - 1)$.

Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: *Não existe nenhum valor real p tal que os vetores \vec{u} e \vec{AB} sejam colineares.*

5. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 7$$

Para que valores reais de a a interseção da superfície esférica com o plano $x = a$ é uma circunferência de raio $\sqrt{6}$?

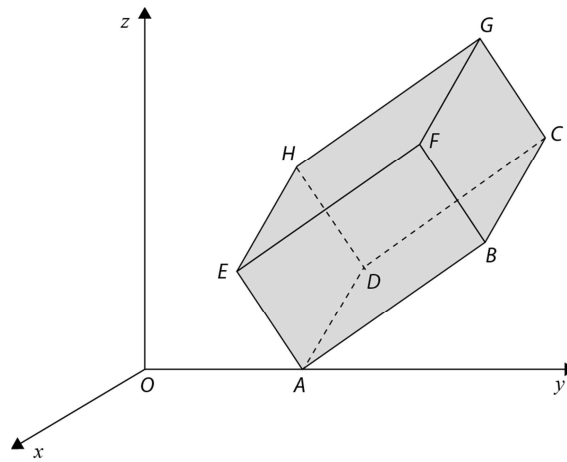
(A) 0 e 1

(B) 1 e 2

(C) 0 e 2

(D) -1 e 1

6. Na figura está representado, num referencial ortonormado do espaço, um prisma retangular $[ABCDEFGH]$, onde A pertence ao eixo Oy e tem ordenada 2, e os pontos B, D e E têm coordenadas, $(-2, 4, 4)$, $(-6, 3, 2)$ e $(-1, 1, 3)$, respetivamente.



6.1. Determine as coordenadas dos pontos F e H .

6.2. Determine uma condição que defina a esfera de centro C , tangente ao plano xOz .

6.3. Considere as seguintes proposições:

p : “o plano paralelo ao plano xOy e que contém o ponto E pode ser definido pela condição $z = 3$.”

q : “ $(x, y, z) = (-2, 4, 4) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto B e é paralela ao eixo das cotas.”

r : “o ponto $M(0, 4, 3)$ pertence ao plano mediador de $[AB]$.”

Indique, justificando, o valor lógico da proposição $p \Rightarrow \sim(q \vee r)$.

7. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere o polinómio $P(x) = (k - 2)x^4 + x^3 - \sqrt{5}x^2 - x + 4 - k^2$.

O valor de k para o qual o polinómio $P(x)$ é de grau 4 e admite zero como raiz simples é:

(A) 2

(B) 4

(C) -2

(D) -4

8. Considere a função f cujo gráfico está representado na figura.

Considere também as proposições:

(I) “ f é uma função par.”

(II) “ f é uma função bijetiva.”

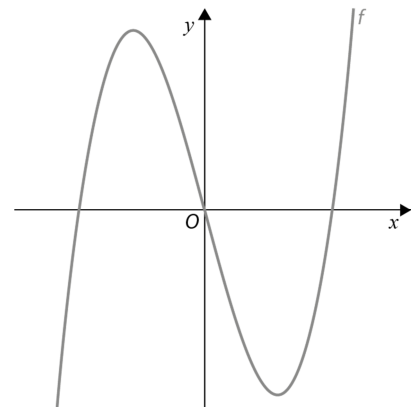
Acerca das proposições anteriores, podemos afirmar que:

(A) são ambas falsas.

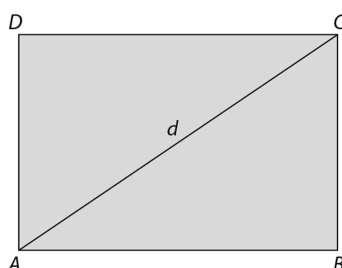
(B) são ambas verdadeiras.

(C) apenas (I) é verdadeira.

(D) apenas (II) é verdadeira.



9. Considere o retângulo $[ABCD]$ representado na figura e seja d a medida da diagonal desse retângulo.



9.1. Mostre que $\vec{AC} + \vec{DB} = 2\vec{DC}$.

9.2. Sabe-se que $\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e $\overline{BC} = \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ e $a > b$.

Considere a pirâmide quadrangular regular cuja base é o quadrado de lado d e a altura é dada por $a - b$.

Prove que o volume da pirâmide pode ser dado por $\frac{8(a+b)}{3(a-b)}$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	6.3.	7.	8.	9.1.	9.2.	
8	20	8	15	20	20	8	15	15	20	8	8	15	20	200