TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

A elipse definida por $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ tem os focos no eixo Ox. Sendo c a semidistância focal, tem-se que $c^2=25-16$, isto é, $c=\sqrt{9}=3$. Assim, $F_1(3{,}0)$.

Para que a reta seja paralela ao eixo das ordenadas, um vetor diretor pode ser $\vec{u}(0{,}1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém F_1 pode ser $(x,y)=(3{,}0)+k(0{,}1), k\in\mathbb{R}$.

2. $-2x^3+5x^2>x+2 \Leftrightarrow \underbrace{-2x^3+5x^2-x-2}>0$

$\Leftrightarrow \quad A(x)>0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-2x-1)(x-2)>0$

Cálculos auxiliares

	-2	5	-1	-2
1		-2	3	2
	-2	3	2	0

$-2x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times(-2)\times 2}}{2\times(-2)}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm 5}{-4}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=2$

$A(x)=(x-1)(-2x^2+3x+2)=$

$=(x-1)\times(-2)\times\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=$

$=(x-1)(-2x-1)(x-2)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x-1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$A(x)>0 \Leftrightarrow \left(x<-\frac{1}{2} \ \vee \ 1<x<2\right)$

$\text{C.S.}=\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\,]1{,}2[$

3. Opção (B)

$a(x)$ é uma condição universal, pois qualquer concretização da variável x por um número real transforma a condição $x^{2018}+1>0$ numa proposição verdadeira.

$b(x)$ é uma condição possível não universal, pois existem concretizações da variável x por números reais que transformam a condição numa proposição verdadeira (por exemplo, para $x=-1$, vem que

$(-1)^{2017} < 0$ é uma proposição verdadeira) e existem valores reais de x que transformam a condição numa proposição falsa (por exemplo, para $x = 1$, vem que $1^{2017} < 0$ é uma proposição falsa).

4.

4.1. O declive da reta s é -2, logo um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{u}(1, -2)$. Este vetor pode também ser um vetor diretor da reta pretendida, uma vez que são paralelas.

Seja M o ponto médio de $[AB]$:

$$M = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{2}, \frac{-4+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}, -\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -3\right)$$

Sistema de equações paramétricas da reta pretendida:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + k \\ y = -3 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

4.2. $r\colon\ (x, y) = (-3, 6) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$ $\qquad m = \frac{3}{2}$

Equação reduzida da reta r: $y = \frac{3}{2}x + b$

Como $(-3,6) \in r$:

$6 = \frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow 6 + \frac{9}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{21}{2}$

$r\colon y = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2}$

Determinação do ponto I, ponto de interseção das retas r e s:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 3x = 21 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 21 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$$

O ponto de interseção das retas r e s é $I(-3,6)$.

Para que a circunferência tenha centro em $I(-3,6)$ e seja tangente ao eixo das abcissas, o raio terá de ser 6.

Assim, uma equação da circunferência é $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 36$.

4.3. $\overrightarrow{AB} = B - A = (\sqrt{8}, -2) - (\sqrt{2}, -4) =$

$= (\sqrt{8} - \sqrt{2}, -2 + 4) =$

$= (2\sqrt{2} - \sqrt{2}, 2) =$

$= (\sqrt{2}, 2)$

$\vec{u}(p^2, p-1), p \in \mathbb{R}$

Para que $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam colineares, tem de se verificar $\frac{p^2}{\sqrt{2}} = \frac{p-1}{2}$.

Assim:

$$2p^2 = \sqrt{2}(p-1) \Leftrightarrow 2p^2 - \sqrt{2}p + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \times 2 \times \sqrt{2}}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 8\sqrt{2}}}{4}$$

Como $2 - 8\sqrt{2} < 0$, a equação é impossível em $\mathbb{R}$, ou seja, não existe nenhum valor real p tal que os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ sejam colineares.

A proposição é, então, verdadeira.

5. Opção (C)

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 7 \ \wedge \ x = a$

Para que a condição $(a-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 7 \ \wedge \ x = a$ represente uma circunferência de raio $\sqrt{6}$ tem que se verificar $(a-1)^2 = 1$, isto é:

$a - 1 = 1 \ \vee \ a - 1 = -1 \Leftrightarrow a = 2 \ \vee \ a = 0$

6.

6.1. $A(0,2,0), B(-2,4,4), D(-6,3,2)$ e $E(-1,1,3)$

Observa-se que $F = E + \overrightarrow{AB}$ e $H = E + \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,2,4)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-6,1,2)$

Logo:

$F = E + \overrightarrow{AB} = (-1,1,3) + (-2,2,4) = (-3,3,7)$

$H = E + \overrightarrow{AD} = (-1,1,3) + (-6,1,2) = (-7,2,5)$

6.2. $C = B + \overrightarrow{AD} = (-2,4,4) + (-6,1,2) = (-8,5,6)$

Como $y_C = 5$, para a esfera ser tangente ao plano xOz e ter centro em C, o raio terá de ser 5.

Uma condição que define a esfera é $(x+8)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 \leq 25$.

6.3. $p \Leftrightarrow \mathrm{V}$; $q \Leftrightarrow \mathrm{V}$ e $r \Leftrightarrow \mathrm{F}$

r é uma proposição falsa, pois, para M pertencer ao plano mediador de $[AB]$, teria de se verificar $d(M,A) = d(M,B)$.

No entanto:

$$d(M,A) = \sqrt{(0-0)^2 + (4-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

e:

$d(M, B) = \sqrt{(0+2)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Assim, $p \Rightarrow \sim(q \vee r)$ é uma proposição falsa, pois:

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{V} \Rightarrow \sim(\mathrm{V} \vee \mathrm{F})\big) &\Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \sim\mathrm{V}) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{F}\end{aligned}$$

7. Opção (C)

Para o polinómio $P(x)$ ser de grau 4, tem que $k-2 \neq 0$ e para que $P(x)$ admita zero como raiz simples tem que $4-k^2=0$.

Assim:

$$\begin{aligned}k-2 \neq 0 \ \wedge \ 4-k^2=0 &\Leftrightarrow k \neq 2 \ \wedge \ k^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow k \neq 2 \ \wedge \ (k=2 \ \vee \ k=-2) \\ &\Leftrightarrow k=-2\end{aligned}$$

8. Opção (A)

A proposição (I) é falsa, visto o eixo das ordenadas não ser eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.

A proposição (II) é falsa, visto não se tratar de uma função injetiva, já que existem objetos diferentes com a mesma imagem (note-se, por exemplo, que existem três zeros da função).

9.

9.1. Observe-se que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$.

Assim:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}}_{} = \\ &= 2\overrightarrow{DC} \qquad + \qquad \vec{0} = \\ &= 2\overrightarrow{DC} \quad \text{c.q.d.}\end{aligned}$$

9.2. $V = \frac{1}{3} A_b \times h$, onde $A_b = d^2$ e $h = a - b$

$d^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$$d^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{4}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} + \frac{4}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{4\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + 4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \times \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(a-2\sqrt{ab}+b) + 4(a+2\sqrt{ab}+b)}{\left((\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(a-2\sqrt{ab}+b+a+2\sqrt{ab}+b)}{\left((\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(2a+2b)}{(a-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{8(a+b)}{(a-b)^2}$$

Assim:

$V = \frac{1}{3} \times \frac{8(a+b)}{(a-b)^2} \times (a-b) = \frac{8(a+b)}{3(a-b)}$, c.q.d.