# TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

**1. Opção (D)**

$U = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$3^0 = 1$

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Das opções apresentadas, apenas $\exists\, x \in U\colon\ 3^x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ é verdadeira.

**2. Opção (C)**

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x = 4 + 2x &\Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2x = 4\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{3} - 2\right)x = 4\\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}-2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{4\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+8}{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+8}{3-4}\\ &\Leftrightarrow x = -8 - 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Assim, $a = -8$ e $b = -4$.

**3.** Como $A(x)$ tem grau 3, 1 é uma raiz de multiplicidade dois e $A(x)$ é divisível por $x + 2$, então $A(x)$ é da forma $A(x) = a(x-1)(x-1)(x+2)$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Como o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x + 3$ é 32, então:

$A(-3) = 32$

Logo:

$$\begin{aligned}a \times (-3-1)(-3-1)(-3+2) = 32 &\Leftrightarrow a \times (-16) = 32\\ &\Leftrightarrow a = -2\end{aligned}$$

Assim:

$A(x) = -2(x-1)^2(x+2) =$

$= -2(x^2 - 2x + 1)(x+2) =$

$= -2(x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2) =$

$= -2(x^3 - 3x + 2) =$

$= -2x^3 + 6x - 4$

**4.**

**4.1.**

**Cálculos auxiliares**

| | −1 | 2 | 5 | −6 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | −3 | −3 | 6 | 0 | 0 |
| | −1 | −1 | 2 | 0 | 0 | 0 |

$P(x) = (x-3)(-x^4 - x^3 + 2x^2) =$

$= (x-3) \times x^2 \times (-x^2 - x + 2) =$

$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{-2} \vee x = \frac{1-3}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

$= (x-3) \times x^2 \times (-1)(x+2)(x-1) =$

$= -x^2(x-3)(x+2)(x-1)$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 0 \;\vee\; x - 3 = 0 \;\vee\; x + 2 = 0 \;\vee\; x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = 3 \;\vee\; x = -2 \;\vee\; x = 1$

Assim, além de 3, as raízes do polinómio são $0$, $-2$ e $1$.

**4.2.** Da alínea anterior, sabemos que $P(x) = -x^2(x-3)(x+2)(x-1)$.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \;\vee\; 0 < x < 1 \;\vee\; x > 3$

C.S. $= ]-2, 0[ \cup ]0,1[ \cup ]3, +\infty[$

**5.**

**5.1.** $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 + y^2 - 10y + 5^2 = -20 + 2^2 + 5^2$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$$

Centro da circunferência: $C(-2,5)$

Raio: $\sqrt{9} = 3$

Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 \leq 9 \ \wedge \ x \geq -2 \ \wedge \ y \leq 5$$

**5.2.** Quando $y = -x$, vem que:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (-x)^2 + 4x - 10x \times (-x) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 4x + 10x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7+3}{2} \ \vee \ x = \frac{-7-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = -5$$

Os pontos de interseção são, então, $P_1(-2,2)$ e $P_2(-5,5)$.

**5.3.**

**5.3.1.** Seja $M$ o ponto médio de $[AB]$: $M = \left(\frac{-2-\frac{1}{3}}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(-\frac{7}{6}, 2\right)$

Equação vetorial pretendida: $(x, y) = \left(-\frac{7}{6}, 2\right) + k(0,1), k \in \mathbb{R}$

**5.3.2.** $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(-\frac{1}{3}, 3\right) - (-2,1) =$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 2, 3 - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 2\right)$$

Para ser colinear com $\overrightarrow{AB}$ é da forma $k\overrightarrow{AB}$, isto é, $\left(\frac{5}{3}k, 2k\right), k \in \mathbb{R}$.

Para que tenha norma $\sqrt{61}$:

$$\sqrt{\left(\frac{5}{3}k\right)^2 + (2k)^2} = \sqrt{61} \Leftrightarrow \frac{25}{9}k^2 + 4k^2 = 61$$

$$\Leftrightarrow \frac{61}{9}k^2 = 61$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow k = 3 \ \vee \ k = -3$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$, tem-se que $k = -3$.

Assim, o vetor nas condições pretendidas tem coordenadas $(-5, -6)$.

**6. Opção (B)**

Como $d(P, Q) = d(P, R)$, vem que:

$\sqrt{(k-1)^2 + (k-1-2)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-1+2)^2}$

isto é:

$$(k-1)^2 + (k-3)^2 = (k+2)^2 + (k+1)^2 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + k^2 - 6k + 9 = k^2 + 4k + 4 + k^2 + 2k + 1$$
$$\Leftrightarrow -8k - 6k = 5 - 10$$
$$\Leftrightarrow -14k = -5$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{14}$$

**7. Opção (B)**

O conjunto de pontos do plano representado a sombreado na figura pode ser definido por:

$$y > -x \;\wedge\; x \leq 0$$

que é equivalente a:

$$\sim(y \leq -x \;\vee\; x > 0)$$

**8.**

**8.1.** Sejam $a$ o semieixo maior da elipse e $b$ o semieixo menor.

Como a elipse está inscrita no retângulo e $A(-6,0)$, então $a = 6$, ou seja, o comprimento do retângulo é 12 e a sua largura, $2b$, é $\frac{36-2\times 12}{2} = 6$.

Como $a = 6$ e $b = 3$, então a elipse pode ser definida por $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

**8.2.** Sejam $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ os focos da elipse.

Então,$a^2 = b^2 + c^2$.

Logo:

$6^2 = 3^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 36 - 9$

$\Leftrightarrow c^2 = 27$, pelo que $c = \sqrt{27}$

Assim, a área do losango é:

$$A = \frac{\sqrt{27}\times 6}{2} = 3\sqrt{3} \times 3 =$$
$$= 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} =$$
$$= 3^{\frac{5}{2}}$$

**9. Opção (D)**

Tem-se que:

- $A + 2\overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AD} = D$, logo $p \Leftrightarrow V$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FE}$, logo $q \Leftrightarrow V$.
- $G - \overrightarrow{AB} = G + \overrightarrow{BA} = F$, logo $r \Leftrightarrow F$.

Assim:

**(A)** $\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim r \Leftrightarrow (\sim(V \Leftrightarrow V) \wedge \sim F)$

$\Leftrightarrow (\sim V \wedge V)$

$\Leftrightarrow (F \wedge V)$

$\Leftrightarrow F$

**(B)** $q \vee p \Rightarrow r \Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee V \Rightarrow F)$

$\Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F})$

$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

**(C)** $\sim(p \vee \sim q \vee r) \Leftrightarrow \sim(V \vee \mathrm{F} \vee \mathrm{V})$

$\Leftrightarrow \sim\mathrm{V}$

$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

**(D)** $q \vee (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow \mathrm{V} \vee (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F})$

$\Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee \mathrm{F})$

$\Leftrightarrow \mathrm{V}$