TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

(I) Para $k = -6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e tem-se que:

$P(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$, isto é, $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

A afirmação (I) é verdadeira.

(II) Para $k = 6$, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 6$ e tem-se que:

$P(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 6 = -12$, isto é, o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é -12 .

A afirmação (II) é falsa.

2. Opção (C)

A opção (A) apresenta uma condição impossível em $\mathbb{R}$, visto tratar-se da disjunção de duas condições impossíveis em $\mathbb{R}$.

Nas opções (B) e (D) encontram-se condições impossíveis em $\mathbb{R}$, visto em ambas as opções se encontrar uma conjunção de uma condição impossível ($p(x)$) com uma outra condição.

A opção (C) apresenta uma condição universal em $\mathbb{R}$, pois é a disjunção de uma condição impossível ($p(x)$) com uma condição universal em $\mathbb{R}$ ($x^2 \geq 0$).

3. Seja P o conjunto-solução da condição $p(x)$ e Q o conjunto-solução da condição $q(x)$.

$$x^{2017} = 0 \vee (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2$$

$P = \{0,1,-2\}$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$Q = \{1\}$

Como $Q \subset P$, verifica-se que $q(x) \Rightarrow p(x)$ e, portanto, é a Carlota que tem razão.

4.

4.1. "Se a Joana não gosta de mirtilos, então a Joana gosta de amoras".

4.2. Se $\sim\left(\left((p \wedge q) \vee r\right) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\right)$ é verdadeira, então $\left((p \wedge q) \vee r\right) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$é falsa.

Logo, $(p \wedge q) \vee r$ é verdadeira e $p \Rightarrow r$ é falsa.

Para $p \Rightarrow r$ ser falsa, p terá de ser verdadeira e r terá de ser falsa. Assim, para $(p \wedge q) \vee r$ ser verdadeira, q terá de ser verdadeira.

Concluímos, então, que p e q são verdadeiras e r é falsa, ou seja, a Joana gosta de amoras e framboesas.

5.

5.1. $A_{\text{retângulo}} = 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} =$

$$= \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{4} =$$

$$= \sqrt{15} + \sqrt{3}$$

A área da bandeira é $(\sqrt{15} + \sqrt{3})$ m^2.

5.2. $A_{\text{círculo}} = \pi \times r^2$, onde $r = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$.

Assim:

$$A_{\text{círculo}} = \pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5} + 1^2} =$$

$$= \frac{\pi}{6-2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\pi\left(6+2\sqrt{5}\right)}{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{6^2-(2\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{36-4\times5} =$$

$$= \frac{2\pi(3+\sqrt{5})}{16} =$$

$$= \frac{\pi(3+\sqrt{5})}{8}$$

A área do círculo representada na bandeira é $\frac{\pi(3+\sqrt{5})}{8}$ m^2.

6. Opção (A)

$A =]-\infty, 1[\cup [\pi, +\infty[$ $\quad$ $B =]-2, 2[$ $\quad$ $C = \mathbb{R}_0^-$

Assim, $\overline{A} = [1, \pi[$, $B \cup C =]-\infty, 2[$ e $\overline{A} \backslash (B \cup C) = [2, \pi[$

7.

7.1. $A(\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^4 + 3(\sqrt{3})^3 - 10(\sqrt{3})^2 - 24\sqrt{3} + (1-\sqrt{2})^2 - 2(1-\sqrt{2}) =$

$= 3^2 + 3 \times 3\sqrt{3} - 10 \times 3 - 24\sqrt{3} + 1^2 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 2 + 2\sqrt{2} =$

$= 9 + 9\sqrt{3} - 30 - 24\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} =$

$= -20 - 15\sqrt{3}$

7.2.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & +3x^3 & -10x^2 & -24x & x^2 - 2x \\ \cline{5-5} -x^4 & +2x^3 & & & x^2 + 5x \\ \hline & 5x^3 & -10x^2 & -24x & \\ & -5x^3 & +10x^2 & & \\ \hline & & & -24x & \end{array}$$

Quociente: $Q(x) = x^2 + 5x$ $\quad$ Resto: $R(x) = -24x$

7.3.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -12 & -24 & 0 \\ -2 & & -2 & -2 & 24 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

Assim:

$A(x) = (x+2)(x^3 + x^2 - 12x) =$

$= (x+2) \times x \times (x^2 + x - 12) =$

Cálculo auxiliar

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1+7}{2} \vee x = \frac{-1-7}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4$

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4)$

$= (x+2) \times x \times (x-3)(x+4)$

7.4.

x	$-\infty$	-4		-2		0		3	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4 \vee -2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 3$

C.S. $=]-\infty, -4] \cup [-2,0] \cup [3, +\infty[$

7.5. $C(x) = ax^2 + bx + c$

Como 3 é uma raiz de multiplicidade 2 de $C(x)$, vem que $C(x) = a \times (x-3)(x-3)$.

Como o resto da divisão de $C(x)$ por $x-1$ é 6, tem-se que $C(1) = 6$, isto é:

$$a \times (1-3)^2 = 6 \Leftrightarrow a \times 4 = 6$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{6}{4}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Assim, $C(x) = \frac{3}{2}(x-3)^2 = \frac{3}{2}(x^2 - 6x + 9) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{27}{2}$.

Tem-se, então, que $a = \frac{3}{2}, b = -9$ e $c = \frac{27}{2}$.

8. Opção (C)

Tem-se que:

$p \Leftrightarrow \mathrm{V}$

$q \Leftrightarrow \mathrm{F}$

$r \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Assim:

(A) $(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \wedge \mathrm{F} \wedge \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

(B) $(p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}))$
$\Leftrightarrow (\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F})$
$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

(C) $(\sim p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Rightarrow (\mathrm{F} \wedge \mathrm{V}))$
$\Leftrightarrow (\mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{F})$
$\Leftrightarrow \mathrm{V}$

(D) $(p \Leftrightarrow (q \vee \sim r)) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee \mathrm{F}))$
$\Leftrightarrow (\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F})$
$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

9. Opção (B)

$$\frac{x^2}{\sqrt[10]{x^8}} = \frac{x^2\sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^8} \times \sqrt[10]{x^2}} =$$

$$= \frac{x^2\sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^{10}}} =$$

$$= \frac{x^2\sqrt[10]{x^2}}{x} =$$

$$= x\sqrt[10]{x^2}$$