TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (D)

As opções (A), (B) e (C) são falsas, uma vez que, em todas, para a concretização -2 da variável, a primeira condição transforma-se numa proposição verdadeira e a segunda numa proposição falsa, ou seja, obtém-se uma proposição falsa.

A opção (D) é verdadeira, já que, para a concretização 2 da variável, a primeira condição transforma-se numa proposição verdadeira e a segunda também e para todas as outras concretizações possíveis a primeira condição transforma-se numa proposição falsa, pelo que, independentemente do valor lógico da segunda condição, se obtém sempre uma proposição verdadeira.

2. Opção (A)

$$d^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{a+2\sqrt{ab}+b} + \frac{1}{a-2\sqrt{ab}+b} \Leftrightarrow d^2 = \frac{a+b-2\sqrt{ab}+a+b+2\sqrt{ab}}{(a+b+2\sqrt{ab})(a+b-2\sqrt{ab})}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2a+2b}{(a+b)^2-4ab}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2(a+b)}{a^2+2ab+b^2-4ab}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2(a+b)}{a^2-2ab+b^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \frac{2(a+b)}{(a-b)^2}$$

3. Opção (C)

$C_1: (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

$\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ são as coordenadas do centro de C_2.

O raio de C_2 é dado por:

$$\sqrt{\left(-3+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

Assim, $C_2: \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

Logo, a condição pedida é $(x+3)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \wedge \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$.

4. Opção (C)

As coordenadas da projeção ortogonal de A sobre o plano xOy são (1, –2, 0).

5. Opção (A)

Qualquer ponto da reta é da forma $(2+k,-1-k,1+2k), k \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação da superfície esférica:

$$\begin{aligned}(2+k-2)^2+(-1-k+1)^2+(1+2k-1)^2=24 &\Leftrightarrow k^2+k^2+4k^2=24\\ &\Leftrightarrow k^2=4\\ &\Leftrightarrow k=2 \vee k=-2\end{aligned}$$

Assim, A (4, –3, 5) e B (0, 1, –3).

Logo, $\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(-3-1)^2+(5+3)^2}=\sqrt{16+16+64}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.

Grupo II

1. $$\begin{aligned}\sim\big((\sim p \vee q \Rightarrow p) \wedge \sim q\big) &\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q \Rightarrow p) \vee q\\ &\Leftrightarrow \sim(\sim(\sim p \vee q) \vee p) \vee q\\ &\Leftrightarrow \big((\sim p \vee q) \wedge \sim p\big) \vee q\\ &\Leftrightarrow \big((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \mathrm{F})\big) \vee q\\ &\Leftrightarrow \big(\sim p \vee (q \wedge \mathrm{F})\big) \vee q\\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee \mathrm{F}) \vee q\\ &\Leftrightarrow \sim p \vee q\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}P(2)=-3 &\Leftrightarrow (2-2)^{n^2+1}+4m-2m+2=-3\\ &\Leftrightarrow 2m=-5\\ &\Leftrightarrow m=-\tfrac{5}{2}\end{aligned}$$

3.

3.1. $A(x,0), x>0$

O raio da circunferência é 6, logo $A(6,0)$.

Como $\overline{OB}=2\overline{OA}$ e B pertence ao eixo Ox, então $B(12,0)$.

Então, o semieixo maior da elipse é 12.

$C(0,y), y<0$

Sabemos que o raio da circunferência é 6, logo $C(0,-6)$.

Assim, o semieixo menor da elipse é 6.

Então, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{12^2}+\frac{y^2}{6^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}=1$.

3.2. A mediatriz de $[AC]$ é a bissetriz dos quadrantes pares, que tem o vetor (1, −1) como vetor diretor, por exemplo, e passa na origem do referencial.

Logo, um sistema de equações paramétricas que define a mediatriz de $[AC]$ é:

$\begin{cases} x = k \\ y = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3.3. $B(12,0)$

$C(0,-6)$

$\overrightarrow{BC}(-12,-6)$

$m_{BC} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

A equação reduzida da reta BC é, então, $y = \frac{1}{2}x - 6$.

A condição pedida é $y \geq \frac{1}{2}x - 6$.

3.4. $A(6,0)$

$C(0,-6)$

$\overrightarrow{AC}(-6,-6)$

$\vec{u}(-6k,-6k)$

$\|\vec{u}\| = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(-6k)^2+(-6k)^2} = 12$

$\Leftrightarrow 36k^2 + 36k^2 = 144$

$\Leftrightarrow k^2 = 2$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \vee k = -\sqrt{2}$

Como $\vec{u}$ tem sentido contrário ao de $\overrightarrow{AC}$, então $\vec{u}\left(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}\right)$.

4.

4.1. $C(2\,,10,0); A(6\,,2,0); B(6,10,0); D(2,2,0); E(2,2,4); F(6,2,4)$

4.2.

4.2.1. $C + \overrightarrow{BF} = C + \overrightarrow{CE} = E$

4.2.2. $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$

4.3. $z = 4$

4.4. $E(2,2,4)$

$C(2,10,0)$

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=(x-2)^2+(y-10)^2+(z-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2-4y+4+z^2-8z+16=y^2-20y+100+z^2$

$\Leftrightarrow 16y-8z-80=0$

$\Leftrightarrow 2y-z-10=0$

4.5. $C(2,10,0)$

$A(6,2,0)$

Seja M o ponto médio de $[AC]$.

$M(4,6,0)$

Se a esfera é tangente ao plano xOz e tem centro em M, então o seu raio é 6.

Assim, a condição pedida é $(x-4)^2+(y-6)^2+z^2 \leq 36$.