Proposta de Teste [janeiro - 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

---

1. Considera o polinómio $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.
Sabe-se que 1 é raiz do polinómio.

1.1. Determina a multiplicidade da raiz 1.

1.2. Mostra que a soma das raízes do polinómio é igual a zero.

2. No plano, em relação a um referencial ortonormado *xOy*, considera o conjunto

$$A = \{P(x,y):\ -1 \le x \le 5 \wedge -4 \le y \le 2\}$$

A representação geométrica do conjunto *A* é um quadrado *Q*.

2.1. Determina a medida de cada uma das diagonais do quadrado *Q*.

2.2. Representa na forma de equação reduzida a circunferência inscrita no quadrado *Q*.

3. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, considera os pontos $A(-1,3,-2)$ e $B(-3,1,0)$.

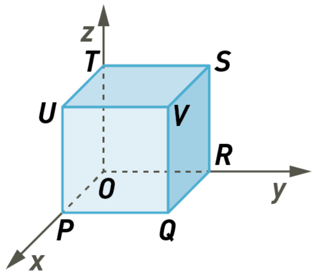
3.1. O plano mediador de [*AB*] interseta o eixo *Oz* no ponto *T*.
Determina as coordenadas do ponto *T*.

3.2. Seja *C* o centro da superfície esférica em que [*AB*] é um diâmetro.

O plano que passa em *C* e é paralelo ao plano *xOy* pode ser definido por:

(A) $x = 2$ **(B)** $z = -1$ **(C)** $x = -4$ **(D)** $y = 2$

4. Na figura, em referencial ortonormado *Oxyz*, está representado um cubo [*OPQRSTUV*] de aresta 4.
Os vértices *P*, *R* e *T* pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos *Ox*, *Oy* e *Oz*.



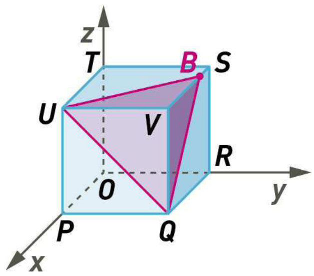
4.1. Indica todos os valores de *k* para os quais o ponto $A(2,\ k-1,\ 2k)$ pertence ao cubo e ao plano mediador de [*VS*].

(A) $[0,4]$ **(B)** $[1,+\infty[$ **(C)** $[0,5]$ **(D)** $[1,2]$

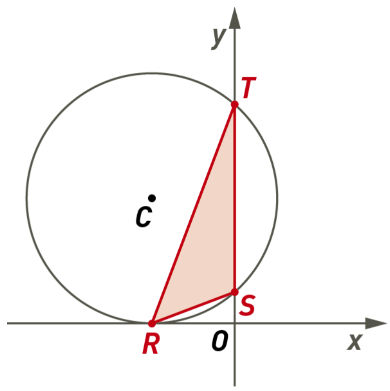
4.2. Sobre a aresta [*VS*] foi marcado um ponto *B*.

Sabe-se que o volume da pirâmide [*BUVQ*] é igual a 7,2 (unidades de volume).

Determina as coordenadas do ponto *B*.



5. Na figura, em referencial ortonormado *xOy*, está representada uma circunferência de centro *C* e definida pela equação
$(x+2)^2+y^2-6y=0$.
Os pontos *S* e *T* resultam da interseção da circunferência com o eixo *Oy* e o ponto *R* é a interseção da circunferência com o eixo *Ox*.



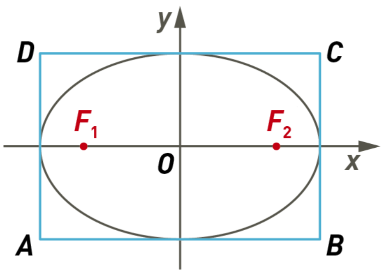
5.1. Determina as coordenadas do ponto *C*.

5.2. Determina o perímetro do triângulo [*RST*]. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

6. Na figura está representada, em referencial ortonormado *Oxy*, uma elipse de centro na origem do referencial inscrita num retângulo [*ABCD*].
Sabe-se que:

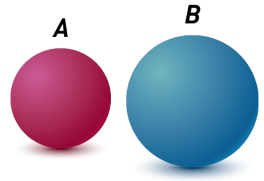
- o ponto *C* tem coordenadas $(3,2)$;
- os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse.

A distância focal, $\overline{F_1F_2}$, é igual a:



(A) $2\sqrt{13}$ **(B)** 5 **(C)** $2\sqrt{5}$ **(D)** $\sqrt{8}$

7. Na figura estão representadas duas esferas *A* e *B*.



Em relação a um referencial ortonormado *Oxyz* a esfera *B* é definida pela condição
$x^2+(y-5)^2+(z+2)^2 \leq 36$.
Sabe-se que:

- a área da superfície da esfera *B* é o triplo da área da superfície da esfera *A*;
- os centros das esferas *A* e *B* são simétricos em relação ao plano *xOz*.

Determina:

7.1. $\overline{RS}$, sabendo que [*RS*] é a interseção da esfera *B* com o eixo *Oz*.

7.2. o raio e as coordenadas do centro da esfera *A*.

FIM

	Cotações													
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**Total**
Pontos	15	20	15	20	20	10	10	15	20	15	10	15	15	**200**

1.

1.1. $P(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-1$

	1	–1	–2	3	–1
1		1	0	–2	1
	1	0	–2	1	0
1		1	1	–1	
	1	1	–1	0	
1		1	2		
	1	2	1		

$P(x)=(x-1)^2(x^2+x-1)$

A raiz 1 tem multiplicidade 2.

Resposta: Multiplicidade 2

1.2. $P(x)=(x-1)^2(x^2+x-1)$

Cálculo auxiliar:

$x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

As raízes do polinómio são: 1 , $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=0$, como se pretendia mostrar.

Resposta: A soma das raízes é zero.

2.

2.1. $5-(-1)=2-(-4)=6$

O quadrado Q tem 6 unidades de lado.

Seja d a medida de cada diagonal do quadrado.

$d^2=6^2+6^2 \Leftrightarrow d^2=72$. Como $d>0$, tem-se $d=\sqrt{72}$, ou seja, $d=6\sqrt{2}$.

A medida de cada uma das diagonais do quadrado Q é $6\sqrt{2}$.

Resposta: $6\sqrt{2}$

2.2. O centro C da circunferência é $\left(\dfrac{5-1}{2}\ ,\ \dfrac{2-4}{2}\right)$, isto é, $(2\ ,\ -1)$.

Sendo r o raio da circunferência, $r=\dfrac{6}{2}=3$.

A equação reduzida da circunferência inscrita no quadrado é $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.

Resposta: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

3.

3.1. Os pontos $P(x, y, z)$ do plano mediador de [AB] respeitam a condição $\overline{AP} = \overline{BP}$.

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2+z^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9+z^2+4z+4=x^2+6x+9+y^2-2y+1+z^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -4x-4y+4z+4=0 \Leftrightarrow x+y-z-1=0$ (equação que representa o plano mediador de [AB]).

Se T pertence ao eixo Oz é do tipo $(0,0,k)$ e é solução da equação do plano mediador de [AB].
$0+0-k-1=0 \Leftrightarrow k=-1$. Então, $T(0,0,-1)$.

3.2. Se [AB] é um diâmetro, então C é ponto médio de [AB].

$C\left(\frac{-1-3}{2},\frac{3+1}{2},\frac{-2+0}{2}\right)$, ou seja, $C(-2,\ 2,-1)$.
O plano que passa em C e é paralelo ao plano xOy é definido por $z=-1$.

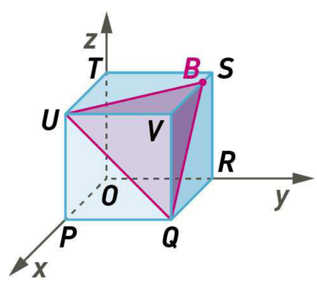
Resposta: Opção correta **(B)** $z=-1$

4.

4.1.
$0\le k-1\le 4 \ \wedge\ 0\le 2k\le 4 \Leftrightarrow 1\le k\le 5 \ \wedge\ 0\le k\le 2 \Leftrightarrow k\in[1\,,2]$
Resposta: Opção correta **(D)** $[1\,,2]$

4.2.
Seja $\overline{VB}=a$.
O volume da pirâmide, $V_{Pirâmide}$, é dado por:

$$V_{Pirâmide}=\frac{1}{3}\times\frac{\overline{UV}\times\overline{VB}}{2}\times\overline{QV}=\frac{1}{6}\times4\times a\times4=\frac{8a}{3}$$



Sabe-se que $V_{Pirâmide}=7,2$. Então, $\frac{8a}{3}=7,2$, ou seja, $a=2,7$.
A abcissa de B é igual a $4-2,7=1,3$.
As coordenadas de B são $(1,3\ ;\ 4\ ;\ 4)$.
Resposta: $B(1,3\ ;4\ ;4)$

5.

5.1. $(x+2)^2 + y^2 - 6y = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 - 6y + 9 = 9 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

Centro: $C(-2\ ,\ 3)$

Resposta: $C(-2\ ,\ 3)$

5.2. Se $x = 0$, tem-se: $4 + (y-3)^2 = 9 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 5 \Leftrightarrow y - 3 = \sqrt{5} \vee y - 3 = -\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow y = 3 + \sqrt{5} \vee y = 3 - \sqrt{5}$.

$T\left(0, 3+\sqrt{5}\right)$ e $S\left(0, 3-\sqrt{5}\right)$. Então, $\overline{ST} = \left|3+\sqrt{5} - \left(3-\sqrt{5}\right)\right| = 2\sqrt{5}$.

Se $y = 0$, tem-se: $(x+2)^2 + 9 = 9 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Então, $R(-2, 0)$.

$R(-2,0)$ e $T\left(0, 3+\sqrt{5}\right)$. Então, $\overline{RT} = \sqrt{(0+2)^2 + \left(3+\sqrt{5}-0\right)^2} = \sqrt{4 + \left(3+\sqrt{5}\right)^2}$.

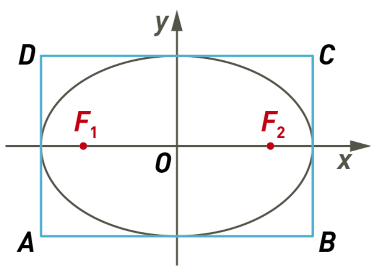
$R(-2,0)$ e $S\left(0, 3-\sqrt{5}\right)$. Então, $\overline{RS} = \sqrt{(0+2)^2 + \left(3-\sqrt{5}-0\right)^2} = \sqrt{4 + \left(3-\sqrt{5}\right)^2}$.

Perímetro do triângulo $[RST]$: $\overline{RS} + \overline{ST} + \overline{RT} = \sqrt{4 + \left(3-\sqrt{5}\right)^2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{4 + \left(3+\sqrt{5}\right)^2}$

$\overline{RS} + \overline{ST} + \overline{RT} \approx 12,2$

Resposta: O perímetro do triângulo [*RST*], arredondado às décimas, é 12,2.

6.



Eixo maior: $2a = 6$

Eixo menor: $2b = 4$

Distância focal: $F_1F_2 = 2c$

$b^2 + c^2 = a^2$

Então, $2^2 + c^2 = 9 \Leftrightarrow c^2 = 5 \Leftrightarrow c = \sqrt{5}$.

$F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{5}$

Resposta: Opção correta **(C)** $2\sqrt{5}$

7.

7.1. $\overline{RS}$, sabendo que [*RS*] é a interseção da esfera *B* com o eixo *Oz*.

Os pontos *R* e *S* pertencem à superfície esférica $x^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 36$ e são do tipo $(0, 0, z)$.

$0^2 + (0-5)^2 + (z+2)^2 = 36 \Leftrightarrow (z+2)^2 = 11 \Leftrightarrow z + 2 = \sqrt{11} \vee z + 2 = -\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow z = -2 + \sqrt{11} \vee z = -2 - \sqrt{11}$

Assim, $\overline{RS} = \left|-2+\sqrt{11} - \left(-2-\sqrt{11}\right)\right| = \left|2\sqrt{11}\right| = 2\sqrt{11}$.

Resposta: $\overline{RS} = 2\sqrt{11}$

7.2. O raio e as coordenadas do centro da esfera *A*.
Seja *C* o centro da esfera *B* e *C'* o centro da esfera *A*.

$C(0,5,-2)$ e $C'(0,-5,-2)$

Seja *r* o raio da esfera *B* e *r'* o raio da esfera *A*.
$r = 6$
Área da superfície da esfera *B*: $4\pi r^2 = 4\pi \times 36$
Área da superfície da esfera *A*: $4\pi r'^2$

$4\pi \times 36 = 3\left(4\pi r'^2\right) \Leftrightarrow r'^2 = 12 \Leftrightarrow r' = \sqrt{12}$

Resposta: A esfera *A* tem centro no ponto $C'(0,-5,-2)$ e raio $\sqrt{12}$.

FIM

	Cotações													
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**Total**
Pontos	15	20	15	20	20	10	10	15	20	15	10	15	15	**200**