

Teste N.º 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: __ Turma: __

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty (p \in \mathbb{R})$

1. A Diana vai fazer uma festa para comemorar o seu 18.º aniversário.

Para a festa foram convidados familiares e amigos da escola da Diana e houve o cuidado de saber acerca das preferências alimentares de cada um, nomeadamente se eram vegetarianos.

Sabe-se que:

- 48% dos convidados são familiares;
- dos familiares, 1 em cada 6 é vegetariano;
- metade dos amigos da escola não são vegetarianos.

1.1. Escolhe-se, ao acaso, um dos convidados desta festa.

Qual é a probabilidade de ter sido escolhido um amigo da escola ou uma pessoa vegetariana, mas não ambos?

- (A) 26%
- (B) 34%
- (C) 60%
- (D) 86%

1.2. Os primos da Diana estavam presentes na festa e quiseram tirar uma fotografia com a Diana e as suas duas irmãs. Para tirar a fotografia, os primos, a Diana e as irmãs colocaram-se lado a lado, de forma aleatória.

Sabendo que a probabilidade de as três irmãs ficarem juntas é $\frac{1}{15}$, determine quantos eram os primos da Diana.

Na sua resposta, equacione o problema e resolva a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

1.3. Considere agora que a Diana convidou para a sua festa 50 pessoas.

A irmã mais velha da Diana organizou-lhe uma surpresa. Para tal, pediu a cada um dos familiares convidados que lhe enviasse uma fotografia com a Diana, e a cada um dos amigos convidados que lhe enviasse duas fotografias com a sua irmã.

Sabe-se que todos os convidados enviaram fotografias e que estas eram todas diferentes.

A irmã da Diana definiu que iria escolher 40 fotografias, metade enviadas pelos familiares e metade enviadas pelos amigos. De quantas maneiras pode fazer a sua escolha se pretender escolher obrigatoriamente as fotografias enviadas pela mãe, pelo pai, por cada uma das duas irmãs e pelo melhor amigo da Diana?

- (A) ${}^{20}C_{16} + {}^{50}C_{18}$
- (B) ${}^{20}C_{16} \times {}^{50}C_{18}$
- (C) ${}^{24}C_{16} \times {}^{52}C_{18}$
- (D) ${}^{24}C_{20} + {}^{52}C_{20}$

2. Seja f a função definida, em \mathbb{R}^+ , por $f(x) = \ln(3x)$.

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{2n}$.

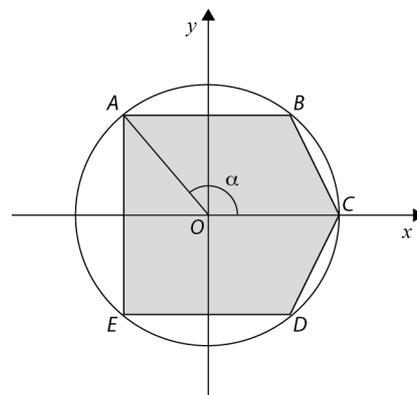
O $\lim f(u_n)$ é igual a:

- (A) $\ln(3) + 2$ (B) $\ln(3) \times \ln(2)$ (C) $\ln(3) + 2\sqrt{2}$ (D) $\ln(3) \times \ln(2\sqrt{2})$

3. Na figura está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao segundo quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao primeiro quadrante e tem ordenada igual à do ponto A ;
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto D pertence ao quarto quadrante e à circunferência e tem abcissa igual à do ponto B ;
- o ponto E pertence ao terceiro quadrante e à circunferência e tem abcissa igual à do ponto A .



Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo COA ($\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$).

Qual das seguintes expressões dá a área do polígono $[ABCDE]$, em função de α ?

- (A) $\sin \alpha + \frac{5}{2} \sin(2\alpha)$
 (B) $\sin \alpha - \frac{5}{2} \sin(2\alpha)$
 (C) $\sin \alpha + \frac{3}{2} \sin(2\alpha)$
 (D) $\sin \alpha - \frac{3}{2} \sin(2\alpha)$

4. Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^- , definida por $g(x) = \frac{x+1}{x^2}$.

Num referencial o.n. Oxy , considere:

- r , a reta tangente ao gráfico de g que apresenta menor declive;
- A , o ponto de interseção da reta r com o eixo das abcissas;
- B , o ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas.

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine o valor exato da área do triângulo $[AOB]$.

5. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição:

$$e^x(1 + 8e^{-2x}) \geq 6 \wedge \ln(e^x) > 0$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

6. Considere as funções f e g , de domínios $[-\pi, 0[$ e $[-\pi, +\infty[$, respetivamente, definidas por:

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

6.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

6.2. Estude a função f , quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

7. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}_0^- , definida por:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 5} - 2x$$

7.1. Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

7.2. O gráfico de f' , primeira derivada da função f , tem um ponto A , cuja distância à origem é igual a 5.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine as coordenadas do ponto A , apresentando os valores aproximados às centésimas.

Pode realizar algum trabalho analítico, antes de recorrer à calculadora.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas do ponto A , com a aproximação pedida.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8. Seja k um número real. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = e^{kx}$.

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ke^x - ke}{1-x} = 3e$.

Qual é o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$?

(A) $\frac{3}{e^3}$

(B) $-\frac{3}{e^3}$

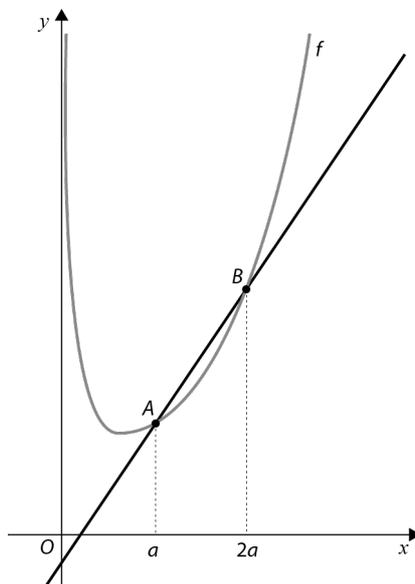
(C) $3e^3$

(D) $3e$



9. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

Para cada número real a , pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sejam A e B os pontos do gráfico da função f , de abcissas a e $2a$, respetivamente.



Mostre que existe, pelo menos, um número real a , pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, tal que a reta AB é paralela à reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	8.	9.	Total
10	18	10	10	10	20	18	18	18	18	20	10	20	200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (A)

Consideremos os acontecimentos:

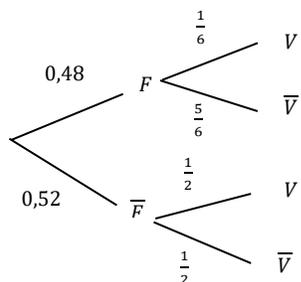
F : “O convidado é familiar da Diana.”

V : “O convidado é vegetariano.”

Sabemos que:

- $P(F) = 0,48$
- $P(V|F) = \frac{1}{6}$
- $P(\bar{V}|\bar{F}) = \frac{1}{2}$

Colocando estes dados num diagrama de árvore, obtém-se:



$$P(F \cap V) = 0,48 \times \frac{1}{6} = 0,08$$

$$P(\bar{F} \cap V) = 0,52 \times \frac{1}{2} = 0,26$$

$$P(V) = 0,08 + 0,26 = 0,34$$

Pretende-se determinar $P(\bar{F} \cup V) - P(\bar{F} \cap V)$.

$$\begin{aligned} P(\bar{F} \cup V) - P(\bar{F} \cap V) &= P(\bar{F}) + P(V) - P(\bar{F} \cap V) - P(\bar{F} \cap V) = \\ &= 0,52 + 0,34 - 0,26 - 0,26 = \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

1.2. Seja n o número de primos da Diana.

O número de maneiras de a Diana, as duas irmãs e os primos se disporem aleatoriamente, lado a lado, para a fotografia é $(n + 3)!$

O número de maneiras de a Diana e as irmãs ficarem juntas é $3!(n + 1)!$.

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{3! \times (n+1)!}{(n+3)!} = \frac{1}{15} &\Leftrightarrow \frac{6 \times (n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{6}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{15} \\ &\Leftrightarrow 6 \times 15 = (n+3)(n+2) \\ &\Leftrightarrow 90 = n^2 + 5n + 6 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 5n - 84 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times (-84)}}{2 \times 1} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-5 \pm 19}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -12 \vee n = 7$$

Eram 7 os primos da Diana.

1.3. Opção (B)

Sabe-se que a Diana convidou 50 pessoas e que 48% dos convidados são familiares. Assim, existem $0,48 \times 50 = 24$ familiares na festa e os restantes 26 convidados são amigos.

Cada familiar enviou uma fotografia, logo existem 24 fotografias enviadas por familiares e, como cada amigo enviou duas fotografias, existem $2 \times 26 = 52$ fotografias enviadas por amigos.

Como a irmã da Diana definiu que iria escolher 40 fotografias, metade enviadas pelos familiares e metade enviadas pelos amigos, terá de escolher 20 fotografias, das 24 enviadas por familiares, e 20 fotografias, das 52 enviadas pelos amigos

Como pretende escolher obrigatoriamente as fotografias enviadas pelos pais, pelas duas irmãs e pelo melhor amigo da Diana, a expressão que dá o número de maneiras de fazer a sua escolha é

$${}^4C_4 \times {}^{20}C_{16} \times {}^2C_2 \times {}^{50}C_{18} = {}^{20}C_{16} \times {}^{50}C_{18}.$$

2. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{2n} = \left(\lim \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n\right)^2 = \left(e^{\sqrt{2}}\right)^2 = e^{2\sqrt{2}}$$

Assim:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow e^{2\sqrt{2}}} f(x) = \ln(3 e^{2\sqrt{2}}) = \ln(3) + \ln(e^{2\sqrt{2}}) = \ln(3) + 2\sqrt{2}$$

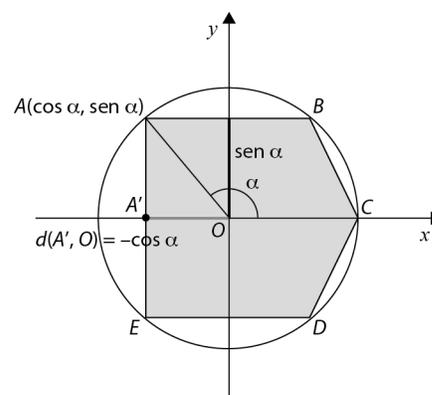
3. Opção (D)

Sabe-se que as coordenadas do ponto A são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Uma vez que o ponto A pertence ao segundo quadrante, concluímos que $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$.

Seja A' a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox .

$$\begin{aligned} A_{[ABCDE]} &= 2 \times A_{[ABCA']} = 2 \times \frac{\overline{A'C} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AA'} = \\ &= 2 \times \frac{1 - \cos \alpha - 2 \cos \alpha}{2} \times \sin \alpha = \\ &= (1 - 3 \cos \alpha) \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha - 3 \cos \alpha \sin \alpha = \end{aligned}$$



$$= \operatorname{sen} \alpha - \frac{3}{2} \times 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$$

$$= \operatorname{sen} \alpha - \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2\alpha)$$

4. Em \mathbb{R}^- :

$$g'(x) = \left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{(x+1)' \times x^2 - (x+1) \times (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{1 \times x^2 - (x+1) \times 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x^2 - 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{-x-2}{x^3}$$

$$g''(x) = \left(\frac{-x-2}{x^3}\right)' = \frac{(-x-2)' \times x^3 - (-x-2) \times (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{-1 \times x^3 - (-x-2) \times 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{-x^3 + 3x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2(2x+6)}{x^6} =$$

$$= \frac{2x+6}{x^4}$$

$$g''(x) = 0$$

Em \mathbb{R}^- :

$$\frac{2x+6}{x^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6 = 0 \wedge x^4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

x	$-\infty$	-3		0
Sinal de g''	$-$	0	$+$	n.d.
Variação de g'	\searrow	$g'(-3)$ mín.	\nearrow	n.d.

$g'(-3) = \frac{-(-3)-2}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$ é, então, o declive da reta r , reta tangente ao gráfico de g que apresenta menor declive.

A equação reduzida da reta r é da forma $y = -\frac{1}{27}x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(-3, g(-3)) = \left(-3, \frac{-3+1}{(-3)^2}\right) = \left(-3, -\frac{2}{9}\right)$ pertence à reta r , vem que:



$$-\frac{2}{9} = -\frac{1}{27} \times (-3) + b \Leftrightarrow -\frac{2}{9} = \frac{3}{27} + b \Leftrightarrow b = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{3}{9}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}$.

Ponto A (ponto de interseção da reta r com o eixo das abscissas):

$$0 = -\frac{1}{27}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{27}x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -9$$

$A(-9, 0)$

Ponto B (ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas):

$B(0, -\frac{1}{3})$

Área do triângulo $[AOB]$:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{9 \times \frac{1}{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

5. $D = \{x \in \mathbb{R}: e^x > 0\} = \mathbb{R}$

Em \mathbb{R} :

$$e^x(1 + 8e^{-2x}) \geq 6 \wedge \ln(e^x) > 0 \Leftrightarrow e^x + 8e^{-x} - 6 \geq 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x + \frac{8}{e^x} - 6 \geq 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 6e^x + 8}{e^x} \geq 0 \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0 \wedge x > 0, \text{ pois } e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos resolver a condição $e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0$.

Consideremos a mudança de variável $e^x = y$:

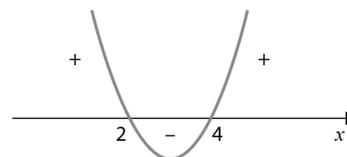
$$e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{y^2 - 6y + 8}_{e^x=y} \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2 \vee y \geq 4 \Leftrightarrow \underbrace{e^x}_{y=e^x} \leq 2 \vee e^x \geq 4$$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = 2$$



Assim:

$$e^{2x} - 6e^x + 8 \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow (e^x \leq 2 \vee e^x \geq 4) \wedge x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x \leq \ln(2) \vee x \geq \ln(4)) \wedge x > 0$$

C.S. = $]0, \ln(2)] \cup [\ln(4), +\infty[$



6.

6.1. g é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^2 x - \cos x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}^2 x + 1 - \cos x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{x} + \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen} x}{x} \times \text{sen} x \right) + \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen} x + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen} x}{1 + \cos x} = \\ &= 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{(0 \times \infty)}{\cong} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{-1} \right]}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}}$$

Consideremos a mudança de variável $\frac{1}{x} = y$; $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$.

$$- \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = -0 = 0$$

• $g(0) = 0$

Logo, g é contínua em $x = 0$.

6.2. Em $[-\pi, 0[$: $f(x) = \text{sen}^2 x - \cos x + 1$

$$f'(x) = 2\text{sen} x \cos x + \text{sen} x$$

$$f'(x) = 0$$

$$2\text{sen} x \cos x + \text{sen} x = 0 \Leftrightarrow \text{sen} x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen} x = 0 \vee 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen} x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Em $[-\pi, 0[$: $x = -\pi$ e $x = -\frac{2\pi}{3}$

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0
Sinal de f'	0	$+$	0	$-$	n.d.
Variação de f	$f(-\pi)$ mín.	\nearrow	$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ Máx.	\searrow	n.d.

Cálculos auxiliares

$$f' \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} (> 0)$$

$$f' \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0 - 1 = -1 (< 0)$$

$$f(-\pi) = 0 - (-1) + 1 = 2$$

$$f \left(-\frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{4}$$

f é estritamente crescente em $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3} \right]$ e é estritamente decrescente em $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0 \right]$.

2 é mínimo relativo em $-\pi$; $\frac{9}{4}$ é máximo relativo em $-\frac{2\pi}{3}$.

7.

7.1. Assíntotas verticais

Como a função f é contínua em todo o seu domínio, \mathbb{R}_0^- , por se tratar da diferença entre duas funções contínuas, o gráfico de f não admite qualquer assíntota vertical.

Assíntotas não verticais

Como a função f tem domínio \mathbb{R}_0^- , temos de estudar as assíntotas não verticais ao gráfico de f , apenas para $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5}-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}-2x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}-2\right) = \\ &= -\sqrt{4+\frac{5}{+\infty}}-2 = -\sqrt{4+0}-2 = -2-2 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-4x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+5}-2x+4x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+5}+2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+5}+2x)(\sqrt{4x^2+5}-2x)}{\sqrt{4x^2+5}-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+5})^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+5}-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\sqrt{4x^2+5}-2x} = \frac{5}{\sqrt{+\infty}-(-\infty)} = \frac{5}{+\infty+\infty} = \frac{5}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$



Portanto, a reta de equação $y = -4x$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função f , quando $x \rightarrow -\infty$.

7.2. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5} - 2x, x \in \mathbb{R}_0^-$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{4x^2 + 5} - 2x)' = \left((4x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} \right)' - (2x)' = \\ &= \frac{1}{2} (4x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}} \times (4x^2 + 5)' - 2 = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 5}} \times 8x - 2 = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 5}} \times 8x - 2 = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}} - 2, x \in \mathbb{R}_0^- \end{aligned}$$

Como A é um ponto do gráfico de f' , as coordenadas de A são da forma $(x, f'(x))$, ou seja,

$$\left(x, \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}} - 2 \right), x \in \mathbb{R}_0^-.$$

Para que a distância de A à origem seja igual a 5:

$$d(O, A) = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}} - 2 - 0 \right)^2} = 5$$

ou seja, $\sqrt{x^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}} - 2 \right)^2} = 5$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

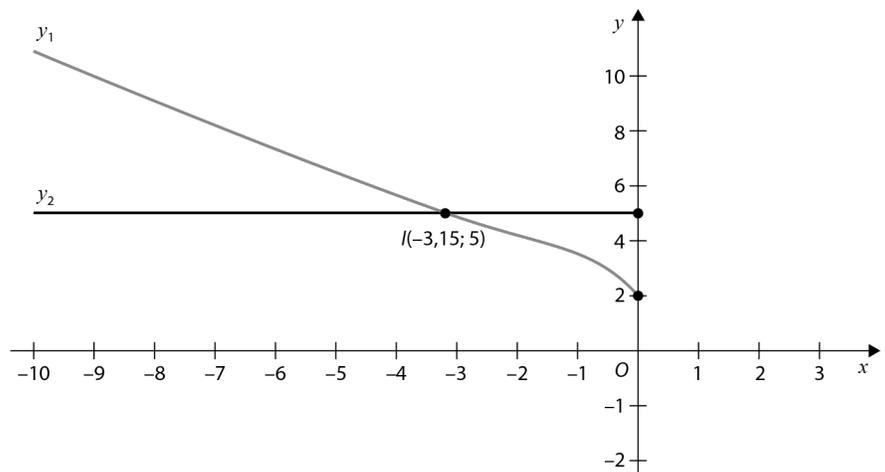
$$y_1 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 5}} - 2 \right)^2}$$

$$y_2 = 5$$

Seja I o ponto de interseção.

As coordenadas de I são

$$(-3,15; 5).$$



Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} f'(-3,15) &= \frac{4 \times (-3,15)}{\sqrt{4(-3,15)^2 + 5}} - 2 \\ &\approx -3,88 \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(-3,15; f'(-3,15))$, ou seja, $(-3,15; -3,88)$.

8. Opção (B)

Seja k um número real.

Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = e^{kx}$.



Sabemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ke^x - ke}{1-x} = 3e &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ke(e^{x-1} - 1)}{1-x} = 3e \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-ke(e^{x-1} - 1)}{x-1} = 3e \\ &\Leftrightarrow -ke \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = 3e\end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$; $x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow 0$.

$$-ke \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 3e \Leftrightarrow -ke \times 1 = 3e \Leftrightarrow k = -3$$

Logo, $g(x) = e^{-3x}$.

g admite derivada finita em \mathbb{R} , pois $g'(x) = -3e^{-3x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Assim:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \stackrel{(1)}{\cong} g'(1) = -3e^{-3} = -\frac{3}{e^3}$$

(1) pois g admite derivada finita em $x = 1$.

9. Sabemos que $A\left(a, \frac{e^a}{a}\right) \in B\left(2a, \frac{e^{2a}}{2a}\right)$.

Começemos por determinar o declive da reta AB , em função de a : $\frac{\frac{e^{2a}}{2a} - \frac{e^a}{a}}{2a - a} = \frac{\frac{e^{2a} - 2e^a}{2a}}{a} = \frac{e^{2a} - 2e^a}{2a^2}$

Determinemos agora $f'(1)$.

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} \quad D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$f'(1) = \frac{e - e}{1} = 0$$

Consideremos a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x}{2x^2}$.

(1) g é contínua em \mathbb{R}^+ , por se tratar do quociente entre duas funções contínuas. Em particular, g é contínua em $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2\sqrt{e}}}{\frac{1}{2}} \approx -1,158 \quad \text{e} \quad g(1) = \frac{e^2 - 2e}{2} \approx 0,976$$

Assim, $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < g(1)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que: $\exists a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: g(a) = 0$, ou seja,

$\exists a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: \frac{e^{2a} - 2e^a}{2a^2} = f'(1)$, isto é, existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

(note-se que $\left]\frac{1}{2}, 1\right[\subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$) tal que a reta AB é paralela à reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$.