Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano
Apoio à avaliação [outubro – 2023]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Considera todos os números naturais de sete algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9.

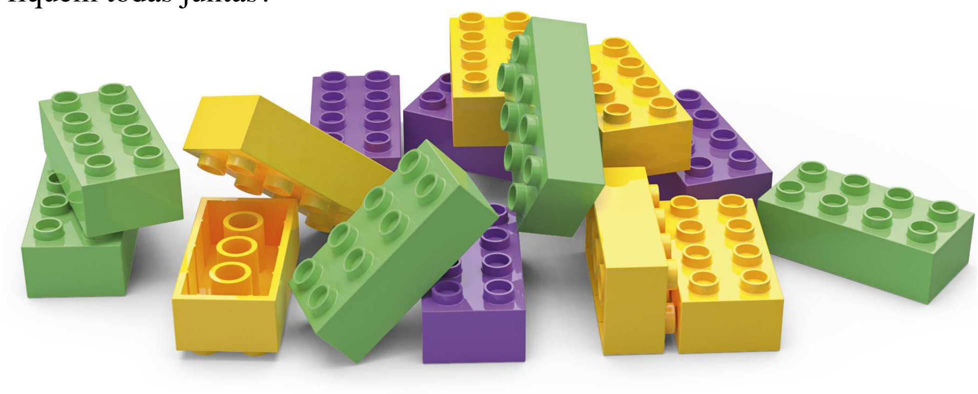
Destes números, quantos têm exatamente três algarismos iguais a 1?

(A) 58 800 **(B)** 143 360

(C) 229 635 **(D)** 860 160

2. A Maria gosta muito de fazer construções com peças de encaixe. Numa tarde de chuva, enquanto realizava uma dessas construções, separou 15 peças com forma igual, sendo 6 amarelas, 5 verdes e as restantes roxas e começou a construir torres encaixando as 12 peças aleatoriamente umas em cima das outras, completamente alinhadas.

Quantas torres distintas, atendendo às cores, pode a Maria construir, de modo que as peças verdes fiquem todas juntas?



3. A Lista X, candidata à Associação de Estudantes da escola da Maria, é constituída por 14 elementos, sendo 8 raparigas e 6 rapazes. Para organizar a festa de *Halloween* da escola, pretende-se escolher uma comissão de três elementos para ocupar três cargos: **Presidente**; **Relações públicas** e **Tesoureiro**.

Quantas comissões mistas (com pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga) poderão ser formadas?

(A) ${}^{8}A_2 \times 6 + {}^{6}A_2 \times 8$ **(B)** ${}^{8}C_2 \times 6 + {}^{6}C_2 \times 8$

(C) $\left({}^{8}A_2 \times 6 + {}^{6}A_2 \times 8\right) \times 3!$ **(D)** $\left({}^{8}C_2 \times 6 + {}^{6}C_2 \times 8\right) \times 3!$

4. Para assistirem ao concerto da artista Olivia Rodrigo no Altice Arena, em 2024, sete amigos, três raparigas e quatro rapazes, entre eles a Ana e o Pedro, compraram sete bilhetes para sete lugares consecutivos na mesma fila. De quantas maneiras diferentes podem ser distribuídos pelos sete lugares, ficando numa das pontas, em lugares consecutivos, a Ana e o Pedro?

5. No teste de Matemática havia oito questões de escolha múltipla, cada uma com quatro opções de resposta: A, B, C e D. No final do teste, a professora referiu que a chave correta das escolhas múltiplas era constituída por uma opção A, duas opções B, duas opções C e três opções D, mas não revelou a ordem pela qual elas ocorriam. Ao invés disso, decidiu colocar uma questão aos alunos: "Atendendo à informação que vos revelei, quantas são as possibilidades de chaves diferentes da escolha múltipla do teste?"
Indica a opção que representa a resposta correta à questão colocada pela professora.

(A) 576 **(B)** 1680

(C) 40320 **(D)** 134 400

6. Na figura está representado um tabuleiro quadrado dividido em 16 quadrados iguais, numerados de 1 a 16. A Maria tem 12 discos, 9 brancos, 1 preto, 1 vermelho e 1 amarelo, só distinguíveis pela cor. Os 12 discos vão ser colocandos, ao acaso, no tabuleiro não mais do que um em cada quadrado.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

6.1. Cada uma das expressões permite determinar o número de configurações diferentes que a Maria poderá obter como resultado da colocação dos 12 discos no tabuleiro.

I. ${}^{16}C_9 \times {}^{7}A_3$ **II.** ${}^{16}C_{12} \times {}^{12}C_9 \times 3!$

Numa composição, explica os raciocínios que conduzem a cada uma destas expressões, referindo o significado, no contexto do problema, de cada um dos seus fatores.

6.2. A Maria coloca, aleatoriamente, as 12 peças no tabuleiro. Determina a probabilidade de as duas diagonais ficarem totalmente preenchidas com discos brancos.
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

7. Sabe-se que o elemento central de uma certa linha do Triângulo Pascal é representado por ${}^{n+1}C_7 + {}^{n+1}C_8$. Determina a soma de todos os elementos dessa linha.

8. O produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 144.

Selecionam-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de os elementos selecionados serem iguais?

(A) $\frac{12}{13}$ **(B)** $\frac{2}{13}$ **(C)** $\frac{1}{13}$ **(D)** $\frac{1}{11}$

9. Considera o desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^6, x \neq 0$.

Determina o termo deste desenvolvimento que não depende da variável x.

10. Um saco contém 50 bolas, todas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 50. Cada bola tem uma única cor e só existem bolas azuis e brancas no saco.
Sabe-se que o número de bolas azuis é maior do que o número de bolas brancas.
Vão ser retiradas do saco, simultaneamente, duas dessas bolas.

Sabe-se que a probabilidade de saírem duas bolas de cores distintas é $\frac{3}{7}$.

Determina quantas bolas brancas há no saco.

FIM

Cotações												Total
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	
Cotações	15	20	15	20	15	20	20	20	15	20	20	**200**

1. Há nove algarismos disponíveis (de 1 a 9).

- ${}^{7}C_{3}$: número de maneiras distintas de escolher a "posição" que será ocupada pelos três algarismos iguais a 1.
- 8^4 : Número de maneiras distintas para completar as restantes quatro "posições" . Em qualquer uma dessas "posições" pode ser ocupada por qualquer um dos restantes oito algarismos ($\neq 1$).
- ${}^{7}C_{3} \times 8^4 = 143\ 360$ (número de números que satisfazem as condições pedidas)

Opção (B)

2. Temos disponíveis 15 peças de encaixe, sendo:

- ✓ 6 amarelas
- ✓ 5 verdes
- ✓ 4 roxas

As peças verdes devem ficar juntas.

- 11 : número de posições distintas que podem ser ocupadas pelas peças verdes que serão colocadas sempre como um bloco.
- ${}^{10}C_{6}$: número de formas distintas de determinar um conjunto de seis posições, a partir das dez ainda livres, para colocar as peças amarelas.
- As posições das peças roxas ficam automaticamente definidas.
- $11 \times {}^{10}C_{6} = 2310$ torres distintas

3. Temos disponíveis 14 elementos:

- ✓ 8 raparigas
- ✓ 6 rapazes

Queremos constituir um conjunto ordenado de três elementos, uma vez que cada um dos elementos escolhidos terá funções distintas.

Sabemos, ainda, que poderá ocorrer uma de duas situações: constituir uma comissão com duas raparigas e um rapaz ou, por outro lado, constituir uma comissão com uma rapariga e dois rapazes.

- ${}^{8}C_{2} \times {}^{6}C_{1}$: número de formas diferente de constituir um grupo com duas raparigas e um rapaz;

- ${}^{8}C_1 \times {}^{6}C_2$: número de formas diferentes de constituir um grupo com uma rapariga e dois rapazes;
- $3!$: permutação dos três elementos escolhidos pelos cargos que têm que desempenhar.

$\left({}^{8}C_2 \times {}^{6}C_1 + {}^{8}C_1 \times {}^{6}C_2\right) \times 3! = \left({}^{8}C_2 \times 6 + 8 \times {}^{6}C_2\right) \times 3!$

Opção (D)

4. Pretendemos sentar os sete amigos em lugares consectivos, em que numa das pontas fiquem a Ana e o Pedro.

- $2 \times 2!$: Número de maneiras diferentes em que a Ana e o Pedro podem ficar num de dois extremos e permutarem entre si.
- $5!$: número de formas diferente de ocupar os restantes cinco lugares pelos outros cinco amigos (não fazem parte a Ana e o Pedro)

$2 \times 2! \times 5! = 480$ maneiras de sentar os amigos de acordo com as condições definidas.

5. $\dfrac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = 1680$

Opção (B)

6.

6.1. Na **resolução I**, ${}^{16}C_9$ representa o número de escolhas possíveis de 9 quadrados, dos 16 disponíveis, para colocar os discos brancos. Quanto a ${}^{7}A_3$ representa o número de diferentes possibilidades de escolher três quadrados, dos sete disponíveis, para colocar três discos de cores diferentes.

Na **resolução II**, ${}^{16}C_{12}$ representa o número de possibilidades diferentes de escolher um conjunto de 12 quadrados, dos 16 quadrados disponíveis, para colocar os 12 discos. Dos 12 lugares para os discos, são escolhidos 9 para os discos brancos, representando-se por ${}^{12}C_9$. Dos 12 lugares restam 3 para colocar os três discos, de cores diferentes, havendo $3!$ diferentes possibilidades.

6.2. O número de casos possíveis é dado por ${}^{16}C_9 \times {}^{7}A_3$ (determinado em **6.1**):

O número de casos favoráveis é dado por: ${}^{8}A_4$.

Os oito quadrados das diagonais são ocupados por 8 discos brancos.

Dos restantes 8 quadrados, quatro vão ser ocupados por discos de cores diferentes (1 branco; 1 vermelho; 1 preto e 1 amarelo), em que o número de possibilidades é ${}^{8}A_4$.

Pela Lei de Laplace, obtém-se o valor da probabilidade pedida: $\dfrac{{}^{8}A_4}{{}^{16}C_9 \times {}^{7}A_3} = \dfrac{1}{1430}$.

7. ${}^{n+1}C_7 + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_8$

Atendendo a que ${}^{n+2}C_8$ é o elemento central de uma linha:

$$\underbrace{{}^{n+2}C_0 \quad {}^{n+2}C_1 \quad \cdots \quad {}^{n+2}C_7}_{8\,\text{elementos}} \quad \boxed{{}^{n+2}C_8} \quad \underbrace{{}^{n+2}C_9 \quad \cdots \quad {}^{n+2}C_{n+2}}_{8\,\text{elementos}}$$

Conclui-se que a linha tem 17 elementos. Então, $n+2=16$, ou seja, $n=14$

A soma dos elementos da “linha em que $n=14$” é $2^{14}=16\,384$.

8. $n^2=144 \Rightarrow n=12$, uma vez que $n > 0$.

Trata-se, portanto, da linha que tem 13 elementos.

Como ${}^{12}C_p = {}^{12}C_{12-p}$, conclui-se que os seis primeiros elementos são iguais aos seis últimos. Assim, há nesta linha seis possibilidades de escolher dois elementos iguais.

Assim:

Número de casos favoráveis: 6

Número de casos possíveis: ${}^{13}C_2$

Aplicando a Lei de Laplace: $\dfrac{6}{{}^{13}C_2} = \dfrac{1}{13}$

Opção (C)

9.

$$\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^6=\sum_{k=0}^{6}{}^6C_k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k}(-x)^k$$

$${}^6C_k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k}(-x)^k={}^6C_k\left(x^{-2}\right)^{6-k}(-1)^k x^k={}^6C_k(-1)^k x^{-12+2k}x^k={}^6C_k(-1)^k x^{-12+3k}$$

O termo independente ocorre quando $-12+3k=0 \Leftrightarrow k=4$.

Se $k=4$, então: ${}^6C_4(-1)^4 x^{-12+3\times 4}=15$

10. Seja b o número de bolas brancas. Então, o número de bolas azuis é igual a $50-b$.

Número de casos favoráveis: ${}^bC_1\times{}^{50-b}C_1$

Número de casos possíveis: ${}^{50}C_2$

Assim, recorrendo à lei de Laplace, vem que:

$$P(\text{"Saírem duas bolas de cores distintas"})=\frac{{}^bC_1\times{}^{50-b}C_1}{{}^{50}C_2}$$

$$\begin{aligned}\frac{{}^bC_1\times{}^{50-b}C_1}{{}^{50}C_2}=\frac{3}{7}&\Leftrightarrow b(50-b)=\frac{3\times 1225}{7}\\&\Leftrightarrow b^2+50b-525=0\\&\Leftrightarrow b=\frac{-50\pm\sqrt{50^2-4\times1\times(-525)}}{2}\\&\Leftrightarrow b=15\vee b=35\end{aligned}$$

Como o número de bolas brancas é inferior ao número de bolas azuis, então $b=15$.

Há 15 bolas brancas no saco.