

Teste N.º 5

**Matemática A**

---

**12.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

## Formulário

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;

$g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ )

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

### Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

### Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho} e^{i\theta} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

1. Numa turma de 12.<sup>o</sup> ano, nem todos os alunos estão inscritos no exame de Matemática A.

Relativamente a essa turma, sabe-se que:

- o número de raparigas é metade do número de alunos que estão inscritos no exame de Matemática A;
- um terço dos alunos inscritos no exame de Matemática A são raparigas;
- em cada sete rapazes, três não estão inscritos no exame de Matemática A.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno da turma.

Determine a probabilidade de esse aluno ser um rapaz e estar inscrito no exame de Matemática A.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

2. Um saco contém nove cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 9.

2.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro cartões do saco.

Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser par?

(A)  $\frac{61}{126}$

(B)  $\frac{65}{126}$

(C)  $\frac{10}{21}$

(D)  $\frac{11}{21}$

2.2. Colocam-se os nove cartões em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta.

Determine a probabilidade de, ao colocar os cartões, números que não sejam primos não ficarem em posições consecutivas. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Seja  $g$  a função, de domínio  $]-\pi, \pi[$ , definida por  $g(x) = 4x + 2\cos x + \cos^2 x$ .

Resolva os itens seguintes, recorrendo a processos exclusivamente analíticos.

3.1. Considere o gráfico da função  $g$  representado num referencial o.n.  $Oxy$ .

Considere:

- $A$  o ponto do gráfico de  $g$  de abcissa 0;
- $r$  a reta tangente ao gráfico de  $g$  em  $A$ ;
- $s$  a reta perpendicular à reta  $r$  em  $A$ ;
- $B$  e  $C$  os pontos de interseção, respetivamente, da reta  $r$  e da reta  $s$  com o eixo das abcissas.

Determine o valor exato da área do triângulo  $[ABC]$ .

3.2. Estude a função  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para cima;
- as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de  $g$ .

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \operatorname{sen} x \times \cos x$ .

Sem recorrer à calculadora, prove que a equação  $f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x)$  é possível no intervalo  $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$ .

5. Para um determinado número real positivo  $k$ , considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-2}}{x^2 + 3x + 2} & \text{se } x < -2 \\ \log k & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 \ln x + e^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

5.1. Seja  $a$  um número real positivo. Para qualquer valor de  $a$ , qual das expressões pode representar a taxa média de variação da função  $f$  no intervalo  $[a, 2a]$ ?

(A)  $3a \ln(16a)$

(B)  $a \ln(16a^3)$

(C)  $a \ln(4a^3)$

(D)  $\ln(16a^4)$

5.2. Averigue se existe algum valor real  $k$  tal que a função  $f$  seja contínua em  $x = -2$ .

Em caso afirmativo, indique esse valor.

5.3. Estude, no intervalo  $]0, +\infty[$ , a função  $f$  quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso exista(m), esse(s) extremo(s).

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

6. Seja  $k$  um número real.

Considere a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{kn}$ .

Sabe-se que o limite de  $(u_n)$  é solução da equação  $e^{-\ln\left(\frac{e}{x}\right)} = \frac{1}{e^2}$ .

Qual é o valor de  $k$ ?

(A)  $-1$

(B)  $0$

(C)  $1$

(D)  $2$

7. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da inequação:

$$2x \geq \ln(3e^x - 2)$$

Apresente o resultado sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

8. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , tal que:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \ln x}{2x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - f(x) - \frac{x^2}{e^x} \right) = -1$$

Qual das equações seguintes pode representar a assíntota oblíqua ao gráfico de  $f$ ?

(A)  $y = 2x - 1$

(B)  $y = -2x + 1$

(C)  $y = 2x + 1$

(D)  $y = -2x - 1$

9. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\alpha} \quad \text{e} \quad z_3 = 2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

9.1. Determine, sem recorrer à calculadora, os valores de  $\alpha$  que satisfazem a condição:

$$\overline{z_2} = z_2 \times z_1$$

9.2. Considere agora que  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo  $z_2 + z_3$ ?

(A) Primeiro

(B) Segundo

(C) Terceiro

(D) Quarto

**FIM**

### COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.	9.1.	9.2.	Total
16	10	16	17	17	17	10	17	17	10	17	10	16	10	<b>200</b>



## TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

### 1. Opção (A)

Consideremos os seguintes acontecimentos:

$F$ : “Ser do sexo feminino.”

$V$ : “Estar inscrito no exame de Matemática A.”

Sabe-se que:

$$\bullet P(F) = \frac{1}{2}P(M)$$

$$\bullet P(F|M) = \frac{1}{3}$$

$$\bullet P(\overline{M}|\overline{F}) = \frac{3}{7}$$

Então:

$$P(F|M) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(F \cap M) = \frac{1}{3}P(M)$$

$$P(\overline{M}|\overline{F}) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{M} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{3}{7}P(\overline{F})$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{3}{7}\left(1 - \frac{1}{2}P(M)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{3}{7} - \frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M \cup F}) = \frac{3}{7} - \frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(M \cup F) = \frac{3}{7} - \frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(M) - P(F) + P(M \cap F) + \frac{3}{14}P(M) = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(M) - \frac{1}{2}P(M) + \frac{1}{3}P(M) + \frac{3}{14}P(M) = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{20}{21}P(M) = -\frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(M) = \frac{3}{5}$$

$$P(F \cap M) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Logo, a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz e estar inscrito no exame de Matemática A é  $\frac{2}{5}$ , ou seja, 40%.

2.

2.1. Opção (D)

Número de casos possíveis:  ${}^9C_4$

Número de casos favoráveis:  $\underbrace{{}^4C_4}_{\text{saírem 4 números pares}} + \underbrace{{}^4C_2 \times {}^5C_2}_{\text{saírem 2 números pares e 2 números ímpares}} + \underbrace{{}^5C_4}_{\text{saírem 4 números ímpares}}$

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^4C_4 + {}^4C_2 \times {}^5C_2 + {}^5C_4}{{}^9C_4} = \frac{11}{21}$$

2.2. Número de casos possíveis: 9!

Número de casos favoráveis:  $\bar{P} \quad P \quad \bar{P} \quad P \quad \bar{P} \quad P \quad \bar{P} \quad P \quad \bar{P}$   
 $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{5! \times 4!}{9!} = \frac{1}{126}$$

3.

3.1.  $A(0, g(0)) = (0, 0 + 2\cos 0 + \cos^2 0) = (0, 3)$

$r: y = mx + b$  onde  $m = g'(0)$

$$g'(x) = (4x + 2\cos x + \cos^2 x)' = 4 + 2 \times (\cos x)' + 2\cos x \times (\cos x)' = 4 - 2 \times \text{sen} x - 2\cos x \text{sen} x$$

$g'(0) = 4 - 2\text{sen} 0 - 2\cos 0 \text{sen} 0 = 4$

$r: y = 4x + b$

Como  $A \in r$ , vem que  $b = 3$ . Assim,  $r: y = 4x + 3$ .

$s: y = -\frac{1}{4}x + 3$ , pois  $m_s = -\frac{1}{m_r}$ .

$B$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com o eixo  $Ox$ , logo:

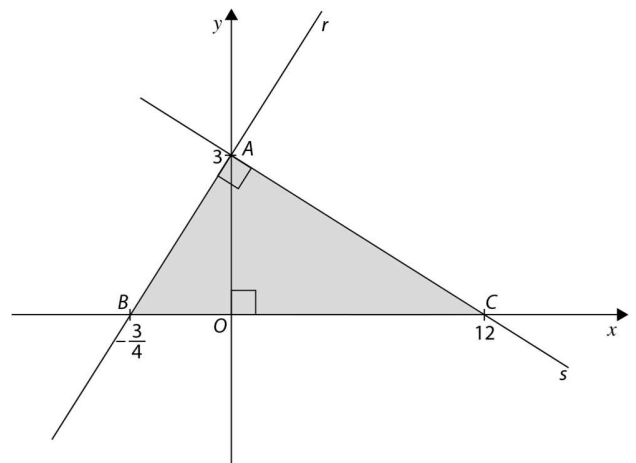
$0 = 4x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \quad B\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

$C$  é o ponto de interseção da reta  $s$  com o eixo  $Ox$ , logo:

$0 = -\frac{1}{4}x + 3 \Leftrightarrow x = 12 \quad C(12, 0)$

Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} = \frac{(12 + \frac{3}{4}) \times 3}{2} = \frac{153}{8}$$



3.2. Seja  $g$  a função, de domínio  $]-\pi, \pi[$ , definida por  $g(x) = 4x + 2\cos x + \cos^2 x$ .

Tem-se que:

$$g'(x) = 4 - 2\sin x - 2\cos x \sin x = 4 - 2\sin x - \sin(2x)$$

$$g''(x) = -2\cos x - 2\cos(2x)$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos x - 2\cos(2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos x = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi + x) = \cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \pi + x = 2x + 2k\pi \quad \vee \quad \pi + x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x \in ]-\pi, \pi[$ , vem que  $x = -\frac{\pi}{3}$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ .

$x$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\pi$
Sinal de $g''$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de $g$	n.d.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	n.d.

O gráfico de  $g$  tem a concavidade voltada para cima em  $]-\pi, -\frac{\pi}{3}[$  e em  $[\frac{\pi}{3}, \pi[$  e a concavidade voltada para baixo em  $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ ; tem dois pontos de inflexão de abscissas  $x = -\frac{\pi}{3}$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ .

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sin x \times \cos x$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)' \times \cos x + \sin x \times (\cos x)' = \cos x \times \cos x - \sin x \times \sin x = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x) \end{aligned}$$

$$f''(x) = (\cos(2x))' = -2\sin(2x)$$

$$f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x) \Leftrightarrow \underbrace{f(x) + 4 \times f'(x) + f''(x)}_{g(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin x \times \cos x + 4 \cos(2x) - 2 \sin(2x)}_{g(x)} = 0$$

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \sin x \times \cos x + 4 \cos(2x) - 2 \sin(2x)$ .

- $g$  é contínua por se tratar da soma de funções contínuas. Em particular,  $g$  é contínua em  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ .

- $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - 2 \sin\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$   
 $= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$   
 $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 - \sqrt{3} = \\
&= \frac{8-3\sqrt{3}}{4} = \\
&= \frac{8-\sqrt{27}}{4}
\end{aligned}$$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$ , pois  $\sqrt{64} > \sqrt{27}$ , isto é,  $8 > \sqrt{27}$ .

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2 \operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times 0 - 2 \times 1 = \\
&= \frac{1}{2} - 2 = \\
&= -\frac{3}{2} (< 0)
\end{aligned}$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[ : g(c) = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[ : f(c) + 4 \times f'(c) + f''(c) = 0$$

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[ : f(c) + 4 \times f'(c) = -f''(c)$$

Logo, a equação  $f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x)$  é possível no intervalo  $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$ .

5.

### 5.1. Opção (B)

$$\begin{aligned}
\text{t. m. v.}_{[a,2a]} &= \frac{f(2a)-f(a)}{2a-a} = \frac{(2a)^2 \ln(2a)+e^2-(a^2 \ln a+e^2)}{a} = \\
&= \frac{4 a^2 \ln(2a)+e^2-a^2 \ln a-e^2}{a} = \frac{4 a^2 \ln(2a)-a^2 \ln a}{a} = \\
&= 4a \ln(2a) - a \ln a = a(4 \ln(2a) - \ln a) = a(\ln(2a)^4 - \ln a) = \\
&= a \ln\left(\frac{(2a)^4}{a}\right) = \\
&= a \ln\left(\frac{16 a^4}{a}\right) = a \ln(16 a^3)
\end{aligned}$$



5.2.  $f$  é contínua em  $x = -2$  se e só se existir  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^x - e^{-2}}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{-2}(e^{x+2} - 1)}{(x+2)(x+1)} = \\ &= e^{-2} \times \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+1} = \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável  $y = x + 2$ ;

$$x \rightarrow -2^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-:$$

$$\begin{aligned} &= e^{-2} \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{1}{-2+1} = \\ &= e^{-2} \times 1 \times (-1) = \\ &= -e^{-2} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = \log k$$

$$\text{Assim, } \log k = -e^{-2} \Leftrightarrow k = 10^{-e^{-2}}$$

Ou seja, existe um valor real  $k$  tal que a função  $f$  é contínua em  $x = -2$ :  $k = 10^{-e^{-2}}$ .

5.3. Em  $]0, +\infty[$  :



$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \ln x + e^2)' = (x^2)' \times \ln x + x^2 \times (\ln x)' + 0 = \\ &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = \\ &= x(2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2 \ln x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin ]0, +\infty[} \vee x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$x$	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$x$	n. d.	+	+	+
$2 \ln x + 1$	n. d.	-	0	+
Sinal de $f'$	n. d.	-	0	+
Varição de $f$	n. d.		mín. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	

**Cálculo auxiliar**

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + e^2 = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{-1}}{2} + e^2 = e^2 - \frac{1}{2e}$$

$e^2 - \frac{1}{2e}$  é mínimo relativo em  $x = e^{-\frac{1}{2}}$ .

$f$  é estritamente decrescente em  $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$  e é estritamente crescente em  $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ .

**6. Opção (C)**

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{kn} = \lim \left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^{kn} = \lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}} = \\ &= \lim \frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]^k} = \\ &= \frac{e^k}{e^{2k}} = \\ &= e^{-k} \end{aligned}$$

Como  $e^{-k}$  é solução da equação  $e^{-\ln\left(\frac{e}{x}\right)} = \frac{1}{e^2}$ , então:

$$\begin{aligned} e^{-\ln\left(\frac{e}{e^{-k}}\right)} &= \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{e^{-k}}{e}\right)} = e^{-2} \Leftrightarrow e^{-k-1} = e^{-2} \\ &\Leftrightarrow -k - 1 = -2 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

$$7. D = \{x \in \mathbb{R}: 3e^x - 2 > 0\} = \left]\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$$

**Cálculo auxiliar**

$$3e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Em  $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ :

$$\begin{aligned} 2x \geq \ln(3e^x - 2) &\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) \geq \ln(3e^x - 2) \Leftrightarrow e^{2x} \geq 3e^x - 2 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0 \end{aligned}$$

Consideremos a mudança de variável  $e^x = y$ :

$$y^2 - 3y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 2$$

**Cálculo auxiliar**

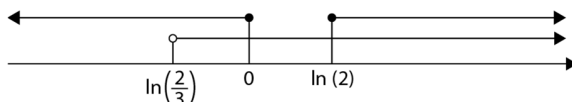
$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = 1$$



Substituindo  $y$  por  $e^x$ , vem:

$$e^x \leq 1 \vee e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln(2)$$



$$\text{C.S.} = ]\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0] \cup [\ln(2), +\infty[$$

**8. Opção (C)**

Seja  $y = mx + b$  a equação da assíntota não vertical ao gráfico de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \ln(x)}{2x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \ln(x)}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 = 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}}_m = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - f(x) - \frac{x^2}{e^x} \right) = -1 \Leftrightarrow - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - 2x + \frac{x^2}{e^x} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{limite notável}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + \frac{1}{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)}_b = 1$$

9.

$$\begin{aligned} 9.1. \overline{z_2} = z_2 \times z_1 &\Leftrightarrow \sqrt{2}e^{i\alpha} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}e^{i(-\alpha)} = \sqrt{2}e^{i(\alpha+\frac{4\pi}{3})} \\ &\Leftrightarrow -\alpha = \alpha + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -2\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

Seja  $\theta$  um argumento de  $z_1$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \wedge \theta \in 3.^\circ \text{Q, logo } \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ (por exemplo)}$$

**9.2. Opção (D)**

$$\begin{aligned} z_2 + z_3 &= \sqrt{2}e^{i\alpha} + \underbrace{2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}}_{\text{simétrico de } 2\sqrt{2}e^{i\alpha}} = \sqrt{2}e^{i\alpha} + (-2\sqrt{2}e^{i\alpha}) = \\ &= -\sqrt{2}e^{i\alpha} = \\ &= \sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)} \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ , então  $\alpha + \pi \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ , isto é, o afixo de  $z_2 + z_3$  pertence ao 4.º quadrante.