Novo Espaço – Matemática A, 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [março – 2020]

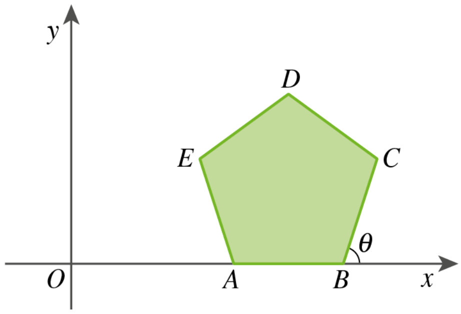
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o pentágono regular $[ABCDE]$.

Sabe-se que:

- os vértices A e B pertencem a Ox;
- $\overline{AB} = 2$;
- θ é a inclinação, em graus, da reta BC.



1.1. Qual das seguintes expressões representa o declive da reta AE?

(A) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ **(B)** $-\cos\theta$ **(C)** $-\tan\theta$ **(D)** $\dfrac{1}{\cos\theta}$

1.2. Determina o produto escalar $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

2. Na figura está representada uma caixa, num referencial o.n. $Oxyz$, com a forma de um prisma, em que as bases são trapézios.

Sabe-se que:

. a base $[AOEF]$ está contida no plano xOz;

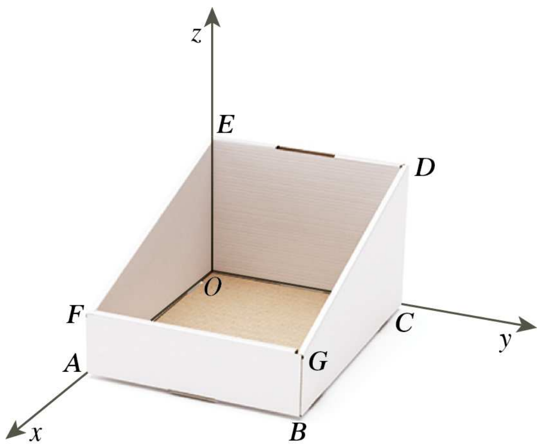
. a face $[OABC]$ está contida no plano xOy;

. a face $[OCDE]$ está contida no plano yOz;

. o ponto F tem coordenadas $(8, 0, 2)$;

. o plano EFG é definido pela equação:

$x + 4z - 16 = 0$



2.1. Determina as coordenadas do ponto A.

2.2. A superfície esférica de equação $(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 100$ interseta o semieixo positivo Oy no ponto C.

Determina a amplitude do ângulo CFE. Apresenta o resultado, em graus, arredondado às décimas.

3. Considera a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & \text{se } \; n \leq 4 \\ \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) & \text{se } n > 4 \end{cases}$$

3.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é limitada.

(B) A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética.

(C) A sucessão (u_n) é crescente.

(D) A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica.

3.2. A soma de 50 termos consecutivos da sucessão a começar no 5.º termo é igual a:

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(D)** 1

4. Seja (v_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = n + 2v_n \,, \; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabe-se que (v_n) é uma progressão aritmética.

4.1. Mostra que $v_n = -n - 1$.

4.2. Considera (w_n) a sucessão tal que $w_n = \dfrac{v_n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Determina o número de termos da sucessão (w_n) que não pertencem à vizinhança $V_{0,01}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

5. Em relação a uma progressão geométrica (u_n), sabe-se que $u_1 = \dfrac{1}{18}$ e que três termos consecutivos são representados por: a, $a+1$ e $a+4$.

Determina a ordem do último destes três termos.

6. Em relação a uma sucessão (u_n), sabe-se que.

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 5$

Justifica, de forma clara, as afirmações seguintes:

6.1. Se $\lim(u_n) = a$, então $a \neq 6$.

6.2. A sucessão (u_n) é convergente.

7. Num parque de estacionamento, o custo da 1.ª hora é 0,20 €. Cada uma das horas seguintes tem um acréscimo de 25% ao custo da hora anterior.

Seja (u_n) a sucessão em que o termo geral u_n representa o custo da n-ésima hora de estacionamento.

Sabe-se que uma viatura esteve estacionada durante 12 horas no parque de estacionamento.

Determina o custo da última hora de estacionamento e o custo total.

Apresenta os resultados em euros arredondados às centésimas.

Na tua resolução deves apresentar o termo geral da sucessão (u_n) e a expressão da soma dos n primeiros termos.

FIM

Cotações													Total
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	
Pontos	15	15	10	20	15	15	20	20	20	15	15	20	**200**

1.

1.1. A inclinação, em graus, da reta AE é igual a $180 - \theta$.

O declive da reta AE é dado por $\tan(180-\theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$.

Resposta: **(C)** $-\tan\theta$

1.2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$

Como $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = 108^\circ$, tem-se:

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = 2 \times 2 \times \cos 108^\circ$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \approx -1,24$

Resposta: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \approx -1,24$

2.

2.1. O ponto A pertence a Ox e tem a mesma abcissa de F.

Assim, conclui-se que $A(8,0,0)$.

Resposta: $A(8,0,0)$

2.2. O ponto C pertence a Oy e tem ordenada positiva.

$C(0,y,0)$, $y > 0$

O ponto C pertence à superfície esférica de equação $(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 100$, logo:

$(0-8)^2 + y^2 + 0^2 = 100$

$(0-8)^2 + y^2 + 0^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 36 \Leftrightarrow y = 6 \vee y = -6$

Como $y > 0$, conclui-se que $C(0,6,0)$.

$$\cos\left(C\hat{F}E\right)=\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FE}}\right)=\frac{\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left\|\overrightarrow{FC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FE}\right\|}$$

$$\overrightarrow{FC}=C-F=(0,6,0)-(8,0,2)=(-8,6,-2)$$

O ponto E pertence a Oz e ao plano cuja equação é $x+4z-16=0$.

Assim, as coordenadas do ponto E são da forma $E(0,0,z)$.

$$0+4z-16=0\Leftrightarrow z=4$$

Assim, conclui-se que $E(0,0,4)$.

$$\overrightarrow{FE}=E-F=(0,0,4)-(8,0,2)=(-8,0,2)$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FE}}\right)=\frac{\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left\|\overrightarrow{FC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{FE}\right\|}=\frac{(-8,6,-2)\cdot(-8,0,2)}{\sqrt{64+36+4}\times\sqrt{64+0+4}}=\frac{64-4}{\sqrt{7072}}=\frac{60}{\sqrt{7072}}$$

Recorrendo à calculadora, obtém-se $C\hat{F}E\approx 44,5^\circ$.

Resposta: $44,5^\circ$

3.

3.1. Se $n\leq 4$: $\frac{1}{4}\leq u_n\leq 4$ **(1)**

Se $n>4$: $-1\leq u_n\leq 1$ **(2)**

De (1) e (2) conclui-se que $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leq u_n\leq 4$.

A sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **(A)** A sucessão (u_n) é limitada.

3.2. Para $n\geq 5$, a soma de quatro termos consecutivos é igual a 0.

Como $50=4\times 12+2$, a soma dos 50 termos é igual a $u_5+u_6=1+0=1$.

$$u_5=\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\quad u_6=\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right)=\sin(3\pi)=0;$$

$u_7=\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$; $u_8=\sin\left(\frac{8\pi}{2}\right)=\sin(0)=0$

Resposta: (D) 1

4.

4.1. $v_1=-2$

$v_2=1+2\times v_1=1+2\times(-2)=-3$

Seja r a razão da progressão aritmética.

$r=v_2-v_1=-3-(-2)=-1$

Termo geral: $v_n=v_1+(n-1)r=-2+(n-1)\times(-2)$

$v_n=v_1+(n-1)r=-2+(n-1)\times(-1)$

$v_n=-n-1$

Resposta: $v_n=-n-1$

4.2. $w_n=\frac{-n-1}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$u_n\notin V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left|u_n+\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{100}\Leftrightarrow\left|\frac{-n-1}{2n+1}+\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{100}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\frac{-2n-2+2n+1}{4n+2}\right|\geq\frac{1}{100}\Leftrightarrow\left|\frac{-1}{4n+2}\right|\geq\frac{1}{100}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4n+2}\geq\frac{1}{100}\Leftrightarrow 4n+2\leq 100\Leftrightarrow n\leq\frac{98}{4}$

Como $\frac{98}{4}=24,5$, conclui-se que existem 24 termos que não pertencem à $V_{0,01}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. $\frac{a+1}{a}=\frac{a+4}{a+1} \Leftrightarrow (a+1)^2 = a(a+4) \Leftrightarrow a^2+2a+1=a^2+4a \Leftrightarrow 2a=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

Assim:

$a=\frac{1}{2}$, $a+1=\frac{3}{2}$ e $a+4=\frac{9}{2}$

Razão da progressão geométrica: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$

Termo geral da progressão geométrica: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{18}\times 3^{n-1}$

$\frac{1}{18}\times 3^{n-1}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 3^{n-1}=81 \Leftrightarrow 3^{n-1}=3^4$

Daqui resulta que $n-1=4$, ou seja, $n=5$.

Resposta: A ordem do último dos três termos considerados é 5.

6.

6.1. Se $\lim(u_n)=a$, então $a\neq 6$.

Se, por exemplo, considerar a vizinhança $V_{\frac{1}{2}}(6)$, não há termos da sucessão pertencentes a esta vizinhança, atendendo a que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<5$.

Daqui resulta que $\lim(u_n)$ não pode ser 6.

6.2. A sucessão (u_n) é convergente.

Sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}>u_n$, pelo que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n>0$ (sucessão crescente).

Sendo (u_n) crescente: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq u_1$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_1\leq u_n<5$ (sucessão limitada)

Sendo (u_n) monótona e limitada, conclui-se que é convergente.

7. $\begin{cases} u_1=0,20 \\ u_{n+1}=u_n+0,25u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=0,20 \\ u_{n+1}=1,25u_n \end{cases}$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão 1,25 e primeiro termo igual a 0,20.

Termo geral: $u_n = 0,20 \times 1,25^{n-1}$

$u_{12} = 0,20 \times 1,25^{11}$
$u_{12} \approx 2,33$

Soma dos n primeiros termos: $S_n = u_1 \times \dfrac{1-r^n}{1-r}$

$S_{12} = 0,2 \times \dfrac{1-1,25^{12}}{1-1,25}$
$S_{12} \approx 10,84$

Resposta: Pela última hora, o custo foi 2,33 € e o custo total foi 10,84 €.