Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, para quaisquer a e b reais positivos?

(A) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$

(B) $\sqrt{(-a)^2}=-a$

(C) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=\sqrt[6]{a\times b}$

(D) $\sqrt[3]{a}:\sqrt{b}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}}$

2. Sejam a e b dois números reais distintos, com $a\neq -b$. Sabe-se que $a+b=-32(a-b)$.

Qual é o valor de $\left(\sqrt[5]{a^2-b^2}\right)^{-1}\times\left(\sqrt[5]{a+b}\right)^2$?

(A) -2

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 2

3. A solução da equação $\sqrt{7}x-4=2\sqrt{3}x+1$ é:

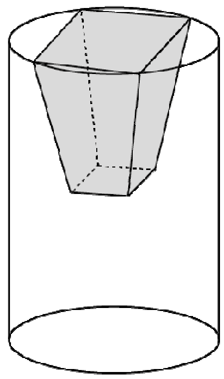
(A) $\sqrt{7}-2\sqrt{3}$

(B) $-\sqrt{7}-2\sqrt{3}$

(C) $-\sqrt{7}+2\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{7}+2\sqrt{3}$

4. Na figura estão representados uma peça constituída por um cilindro e um tronco de uma pirâmide quadrangular regular de altura igual à do cilindro. A base maior do tronco da pirâmide está inscrita numa das bases do cilindro.



Sabe-se que:

- o raio da base do cilindro mede r unidades de comprimento;
- a altura do cilindro é o quádruplo do raio da sua base;
- a altura do tronco da pirâmide é metade da altura do cilindro.

O volume do tronco da pirâmide pode ser expresso pela fórmula:

$$V_t=\frac{h_t}{3}\times\left(A_B+\sqrt{A_B\times A_b}+A_b\right)$$

sendo A_B a área da base maior, A_b a área da base menor e h_t a altura do tronco.

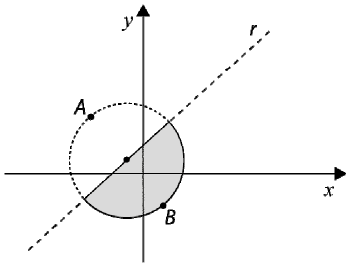
Prove que o volume do tronco da pirâmide é igual a $\frac{7}{3}r^3$ unidades de volume.

5. Num referencial cartesiano do plano, considere a representação gráfica da figura.

Na figura estão representados:

- os pontos $A(-3,2)$ e $B(1,-1)$;
- a circunferência de diâmetro $[AB]$;
- a reta r definida por todos os pontos equidistantes de A e de B.

Defina a região a sombreado por uma condição.



6. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos $A(a+1,2)$, $B(9,3)$, $C(b+1,c+1)$ e $D(5,11)$.

6.1. Escreva a equação reduzida da circunferência de centro em B e que passa em D.

6.2. Determine o valor de a, o valor de b e o valor de c, de modo que $[ABCD]$ seja um losango.

7. A expressão $\sqrt[9]{8a^3} \times (2^4 a^{-4} b^{24})^{-\frac{1}{12}}$ é igual, para quaisquer números reais positivos a e b, a:

(A) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b^{-2}}$

(B) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b^2}$

(C) $\frac{\sqrt{a^3}}{b^2}$

(D) $\frac{\sqrt{a^3}}{b^{-2}}$

8. Considere, num referencial o.n. Oxy, a região definida pela condição:

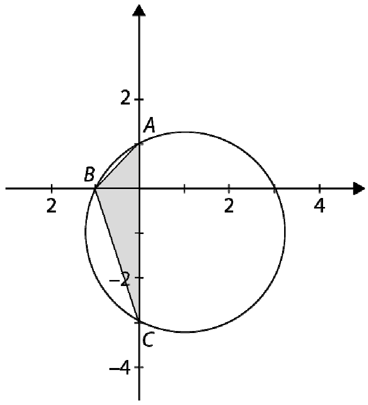
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq \frac{1}{4} \quad \wedge \quad y - 3x + 1 \leq 0$$

Qual é o perímetro dessa região?

(A) $\frac{\pi}{4} + 1$ **(B)** $\frac{\pi}{2} + 1$ **(C)** $\pi + 1$ **(D)** $2\pi + 1$

9. Identifique e defina analiticamente, utilizando uma equação ou inequação cartesiana, o conjunto de pontos do plano cuja distância ao ponto $A(-2,2)$ é o dobro da distância ao ponto $B(1,0)$.

10. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela condição $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3$ e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se, ainda, que:

- A e C são os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy, sendo C o ponto de menor ordenada;
- o ponto B é o ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox com menor abcissa.

10.1. Prove que o centro da circunferência tem coordenadas $(1, -1)$.

10.2. Defina vetorialmente a reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares que passa pelo centro da circunferência.

10.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**10.3.**	
10	10	10	20	20	15	20	10	10	20	15	20	20	**200**

Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

A opção (A) é falsa, pois, por exemplo, se $a = 1$ e $b = 4$, então $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$ e $\sqrt{a+b} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, mas $3 \neq \sqrt{5}$.

A opção (B) é falsa, pois $\sqrt{(-a)^2} = |a| = a$. Assim, se, por exemplo, $a = 3$, $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(-3)^2} =$ $= |-3| = 3$ e $3 \neq -3$.

A opção (C) é falsa, pois $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} \times \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2 \times b^3}$. Assim, se, por exemplo, $a = 1$ e $b = 64$, então $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = \sqrt[3]{1} \times \sqrt{64} = 1 \times 8 = 8$ e $\sqrt[6]{a \times b} = \sqrt[6]{1 \times 64} = \sqrt[6]{64} = 2$, mas $8 \neq 2$.

A opção (D) é verdadeira, pois $\sqrt[3]{a} : \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} : \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}}$.

2. Opção (A)

$$\left(\sqrt[5]{a^2 - b^2}\right)^{-1} \times \left(\sqrt[5]{a+b}\right)^2 = \sqrt[5]{(a^2 - b^2)^{-1}} \times \sqrt[5]{(a+b)^2} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)(a+b)}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a+b}{a-b}} =$$

$= \sqrt[5]{-32}$, pois $a + b = -32(a - b)$, logo $\frac{a+b}{a-b} = -32$.

$$= -2$$

3. Opção (B)

$$\sqrt{7}x - 4 = 2\sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{7}x - 2\sqrt{3}x = 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{3}\right)}$$

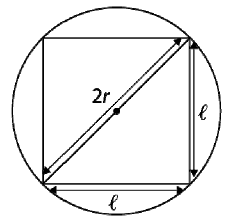
$$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{7} + 10\sqrt{3}}{7 - 12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{7} + 10\sqrt{3}}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$$

$\text{C.S.} = \left\{-\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right\}$

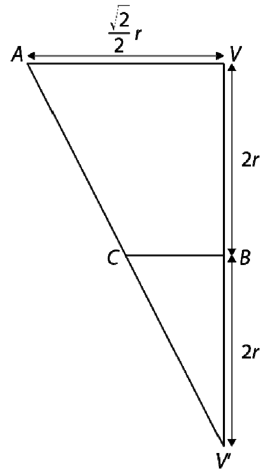
4. Comecemos por determinar uma expressão da área da base maior do tronco em função de r.



$$l^2 + l^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 4r^2 \Leftrightarrow l^2 = 2r^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{l>0} l = \sqrt{2}\,|r|$$

$$\Leftrightarrow l = \sqrt{2}r$$

$$A_{\text{base maior do tronco}} = l^2 = 2r^2$$



Sejam V o centro da base superior do cilindro, V' o centro da base inferior do cilindro, A o ponto médio de um dos lados da base maior do tronco da pirâmide, B o centro da base menor do tronco da pirâmide e C o ponto médio de um dos lados da base menor do tronco da pirâmide.

$\overline{AV} = \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r \qquad \overline{VV'} = 4r \qquad \overline{VB} = 2r$

Os triângulos $[AVV']$ e $[CBV']$ são semelhantes (pelo critério AA), logo:

$$\frac{4r}{\frac{\sqrt{2}}{2}r} = \frac{2r}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2r \times \frac{\sqrt{2}}{2}r}{4r} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{4}r$$

Assim, o lado da base menor do tronco é igual a $2 \times \frac{\sqrt{2}}{4}r = \frac{\sqrt{2}}{2}r$ e a área da base menor do tronco é igual a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = \frac{r^2}{2}$.

Assim, o volume do tronco da pirâmide é igual a:

$$V_t = \frac{2r}{3} \times \left(2r^2 + \sqrt{2r^2 \times \frac{r^2}{2}} + \frac{r^2}{2}\right) = \frac{2r}{3}\left(2r^2 + r^2 + \frac{r^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{2r}{3} \times \frac{7r^2}{2} =$$

$$= \frac{7}{3}r^3 \text{ u.v.}$$

5. $d(A, B) = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad r = \frac{5}{2}$

Circunferência de diâmetro [*AB*]: $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$M_{[AB]} = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2-1}{2}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

A reta r é a mediatriz de $[AB]$:

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow -4y - 2y = -6x - 2x - 9 - 4 + 1 + 1$

$\Leftrightarrow -6y = -8x - 11$

$\Leftrightarrow y = \frac{8}{6}x + \frac{11}{6}$

$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$

Assim, uma condição que define a região a sombreado é:

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4} \quad \wedge \quad y \leq \frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$$

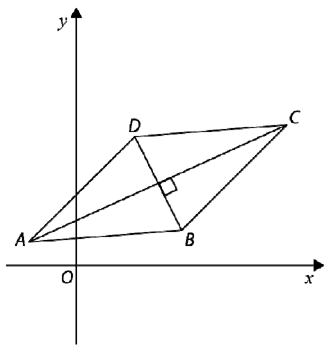
6.

6.1. $r = d(B, D) = \sqrt{(9-5)^2 + (3-11)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$

A equação reduzida da circunferência de centro em B e que passa em D é:

$$(x-9)^2 + (y-3)^2 = 80$$

6.2. Sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares e se bissetam. Determinemos, então, a mediatriz de [*BD*]:



$\sqrt{(x-9)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-11)^2}$

$\Leftrightarrow (x-9)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-11)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 22y + 121$

$\Leftrightarrow -6y + 22y = 18x - 10x - 81 - 9 + 25 + 121$

$\Leftrightarrow 16y = 8x + 56$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

Como A pertence á mediatriz de $[BD]$:

$2 = \frac{a+1}{2} + \frac{7}{2} \Leftrightarrow 4 = a + 1 + 7 \Leftrightarrow 4 = a + 8 \Leftrightarrow a = -4$

Logo, $A(-3, 2)$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[BD]$:

$M = \left(\frac{9+5}{2}, \frac{3+11}{2}\right) = (7,7)$ $\qquad \overrightarrow{AM} = (7,7) - (-3,2) = (10,5)$

$C = M + \overrightarrow{AM} = (7,7) + (10,5) = (17,12)$

Logo, $b = 16$ e $c = 11$.

7. Opção (B)

$$\sqrt[9]{8a^3} \times (2^4 a^{-4} b^{24})^{-\frac{1}{12}} = \sqrt[9]{(2a)^3} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} =$$

$$= \sqrt[3]{2a} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{a} \times \frac{1}{b^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}}{b^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2}}{b^2}$$

8. Opção (B)

A condição $(x-1)^2+(y-2)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ define o círculo de centro (1, 2) e raio $\frac{1}{2}$.

A condição $y-3x+1 \leq 0$ define um semiplano cuja fronteira é a reta definida por $y=3x-1$ e que contém o centro do círculo $(2=3\times 1-1)$, logo, a reta contém o diâmetro do círculo.

Assim, o perímetro da região é igual a $d+\frac{2\pi r}{2}=1+\frac{\pi}{2}$.

9. Seja $P(x,y)$ um ponto genérico do plano.

$d(P,A)=2d(P,B)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=4((x-1)^2+y^2)$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4=4x^2-8x+4+4y^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-12x+3y^2+4y-4=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}=0$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)+\left(y^2+\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{3}+4+\frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{52}{9}$

Esta equação define uma circunferência de centro $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ e raio igual a $\frac{\sqrt{52}}{3}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

10.

10.1. $x^2+y^2-2x+2y=3 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+2y=3$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=3+1+1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=5$

Logo, o centro da circunferência tem coordenadas $(1,-1)$.

10.2. Uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares $(y=x)$ admite $(1,1)$ como vetor diretor. Assim, uma resposta possível é $(x,y)=(1,-1)+k(1,1), k \in \mathrm{IR}$.

10.3. Determinemos as coordenadas de A e de C:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y=3 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2y=3 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2y-3=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\times(-3)}}{2} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-2\pm 4}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Assim, $A(0,1)$ e $C(0,-3)$.

Determinemos as coordenadas de B:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y=3 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times(-3)}}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pm 4}{2} \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Assim, $B(-1,0)$, pois B tem abcissa negativa.

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times|\text{abcissa de } B|}{2}=\frac{4\times 1}{2}=2 \text{ u. a.}$$