Novo Espaço – Matemática A, 10.º ano

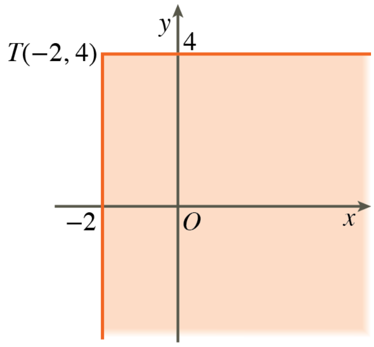
Proposta de teste de avaliação [novembro – 2020]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Em relação a um referencial o.n. Oxy, considera os conjuntos A e B, tais que:

- A é o conjunto de pontos correspondente à região sombreada representada na figura;
- $B=\{P(x,y):\ -3\le y\le 2\}$



1.1. Sabe-se que o ponto S pertence a $A\cap B$.

Qual das seguintes opções pode corresponder às coordenadas do ponto S?

(A) $\left(-1,\sqrt{5}\right)$ **(B)** $\left(3,\frac{5}{2}\right)$ **(C)** $\left(-\frac{5}{2},\sqrt{2}\right)$ **(D)** $\left(3,-\frac{5}{2}\right)$

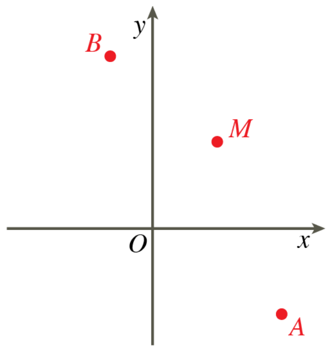
1.2. Para que valores reais de k, o ponto P de coordenadas $\left(\frac{1-k}{2},\ 1-3k\right)$ pertence ao conjunto A?

Apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais.

2. No referencial o.n. Oxy da figura estão representados os pontos A, B e M.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(3,-2)$;
- o ponto B tem coordenadas $(-1,4)$;
- M é o ponto médio de $[A'B']$, sendo A' a projeção ortogonal de A sobre o eixo Ox e B' a projeção ortogonal de B sobre o eixo Oy.

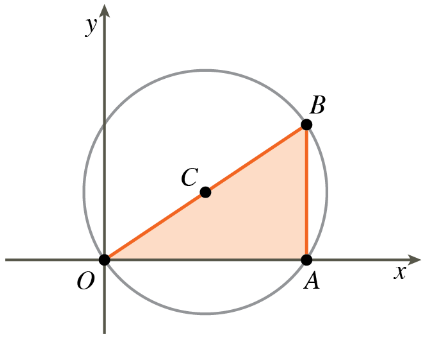


2.1. Determina as coordenadas do ponto M.

2.2. Sabendo que a mediatriz de $[AB]$ interseta o eixo Ox no ponto R, determina as coordenadas de R.

2.3. Os pontos A e B são extremos de um diâmetro de uma circunferência. Determina, na forma reduzida, a equação dessa circunferência.

3. No referencial o.n. Oxy da figura estão representados uma circunferência de centro C e um triângulo $[OAB]$.



Sabe-se que:

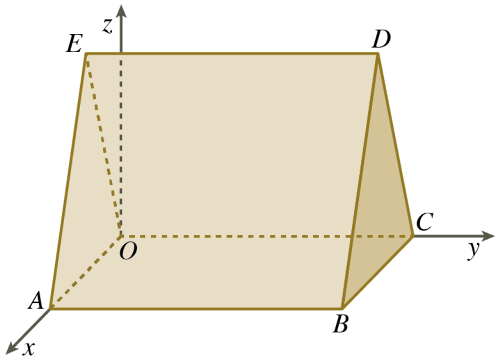
- a circunferência é definida pela equação:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=13$$

- $[OB]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox.

Determina a medida da área do triângulo $[OAB]$.

4. Em ambientes relacionados com a quadra natalícia, são vários os elementos com formas geométricas.



No referencial o.n. Oxy da figura acima está representado um prisma triangular reto.

Sabe-se que:

- a face $[OABC]$ está contida no plano xOy;
- a base $[AOE]$ está contida no plano xOz;
- a base $[BCD]$ está contida no plano $y=8$;
- o ponto A tem coordenadas $(4,0,0)$;
- o ponto D tem coordenadas $(2,8,5)$.

4.1. Escreve uma condição que defina:

a) a reta que passa em D e é paralela ao eixo Ox;

b) o segmento de reta $[DE]$.

4.2. Determina uma equação, na forma $ax+by+cz+d=0$, do plano mediador de $[AD]$.

5. Considera, num referencial o.n. *Oxy*, a esfera definida pela inequação $x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4$.

A interseção da esfera dada com o plano de equação $z=3$ é um círculo.

Qual é a área desse círculo?

(A) 2π **(B)** 3π **(C)** 4π **(D)** 9π

6. Na figura 1 está uma fotografia que representa uma esfera sobre uma base com a forma de um prisma. Na figura 2 apresenta-se um esquema dessa fotografia constituído por uma esfera e um prisma quadrangular regular, no qual foi aplicado um referencial o.n. *Oxyz*.

Figura 1

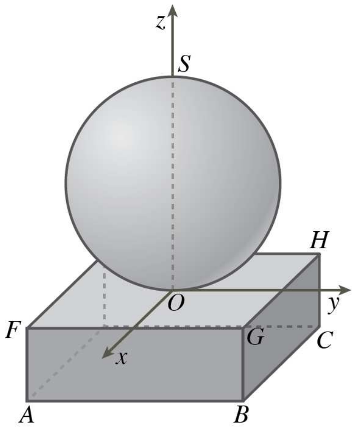


Figura 2

Em relação ao esquema, sabe-se que:

- a origem do referencial coincide com o centro da base superior do prisma;
- o semieixo positivo *Ox* passa no ponto médio de [*FG*];
- o semieixo positivo *Oy* passa no ponto médio de [*GH*];
- *S* pertence ao semieixo positivo *Oz* e [*OS*] é um diâmetro da esfera;
- $\overline{OS}=\overline{AB}$;
- o ponto *A* tem coordenadas $(3,-3,-2)$;
- a esfera é definida pela inequação $x^2+y^2+(z-3)^2 \leq 9$.

6.1. Determina as coordenadas do ponto médio de [*AS*].

6.2. Determina o volume da peça constituída pela esfera e pelo prisma. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

FIM

	Cotações												
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.**	**4.1. a)**	**4.1. b)**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**Total**
Pontos	15	20	15	15	15	20	15	15	20	15	15	20	**200**

1.

1.1. $A=\{P(x,y):\ \ x\geq -2 \wedge\ \ y\leq 4\}$; $B=\{P(x,y):\ \ -3\leq y\leq 2\}$

$A\cap B=\{P(x,y):\ x\geq -2 \wedge\ -3\leq y\leq 2\}$

Resposta: (D) $\left(3,-\dfrac{5}{2}\right)$

1.2. $\left(\dfrac{1-k}{2},\,1-3k\right)\in A \Leftrightarrow \dfrac{1-k}{2}\geq -2\ \wedge\ 1-3k\leq 4 \Leftrightarrow 1-k\geq -4\ \wedge -3k\leq 3 \Leftrightarrow k\leq 5\ \wedge\ k\geq -1$

Resposta: $k\in[-1,5]$

2.

2.1. $A'(3,0)$ e $B'(0,4)$

Assim, $M\left(\dfrac{3+0}{2},\dfrac{0+4}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\dfrac{3}{2},2\right)$.

Resposta: As coordenadas do ponto M são $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$.

2.2. O ponto R tem coordenadas do tipo $(x,0)$ e $\overline{AR}=\overline{BR}$.

$\sqrt{(x-3)^2+4}=\sqrt{(x+1)^2+16} \Leftrightarrow x^2-6x+9+4=x^2+2x+1+16 \Leftrightarrow -8x=4 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Resposta: O ponto R tem coordenadas $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

2.3. O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$. Seja C esse ponto.

$C\left(\dfrac{3-1}{2},\dfrac{-2+4}{2}\right)$, ou seja, $C(1,1)$.

Seja r o raio da circunferência.

$r=\overline{CA}=\sqrt{(1-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13}$

Equação da circunferência: $(x-1)^2+(y-1)^2=13$

Resposta: $(x-1)^2+(y-1)^2=13$

3. Circunferência: $(x-3)^2+(y-2)^2=13$

O ponto *A* tem coordenadas do tipo $(x,0)$, $x>0$, e pertence à circunferência.

$(x-3)^2+(0-2)^2=13 \Leftrightarrow (x-3)^2=9 \Leftrightarrow x-3=3 \vee x-3=-3 \Leftrightarrow x=0 \vee x=6$

O ponto *A* tem coordenadas $(6,0)$.

$\overline{OA}=6$

Sabe-se que *C* tem coordenadas $(3,2)$ e é o ponto médio de [*OB*].

Sendo (x,y) as coordenadas do ponto *B*, tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{0+x}{2}=3 \\ \dfrac{0+y}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

O ponto *B* tem coordenadas $(6,4)$, logo $\overline{AB}=4$.

O triângulo [*OAB*] é retângulo em *A* (ângulo *BAO* inscrito numa semicircunferência).
A medida da área do triângulo [*OAB*] é dada por:

$$\frac{\overline{OA}\times\overline{AB}}{2}=\frac{6\times 4}{2}=12$$

Resposta: A medida da área do triângulo [*OAB*] é 12.

4.

4.1. **a)** $D(2,8,5)$

A reta que passa em *D* e é paralela ao eixo *Ox* pode ser definida pela condição:

$y=8 \wedge z=5$

Resposta: $y=8 \wedge z=5$

b) $D(2,8,5)$ e $E(2,0,5)$.

O segmento de reta [*DE*] pode ser definido pela condição: $x=2 \wedge z=5 \wedge 0\leq y\leq 8$

Resposta: $x=2 \wedge z=5 \wedge 0\leq y\leq 8$

4.2. $A(4,0,0)$ e $D(2,8,5)$

Seja $P(x, y, z)$ tal que $\overline{PA} = \overline{PD}$.

$\overline{PA} = \overline{PD} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2 + (z-5)^2} \Leftrightarrow$

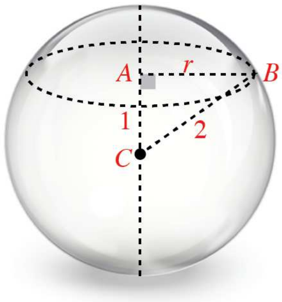
$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16y + 64 + z^2 - 10z + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x + 16y + 10z - 77 = 0$

Resposta: $-4x + 16y + 10z - 77 = 0$

5. O centro da esfera é o ponto C de coordenadas $(0,0,2)$ e o raio é 2.

O círculo tem centro $A(0,0,3)$ e raio r, sendo $1 + r^2 = 2^2$.



Daqui resulta que $r = \sqrt{3}$.

Área do círculo: $\pi r^2 = 3\pi$

Resposta: **(B)** 3π

6.

6.1. $A(3,-3,-2)$

$x^2 + y^2 + (z-3)^2 \leq 9$

A esfera tem como centro o ponto de coordenadas $(0,0,3)$ e raio 3.

Assim, o ponto S tem coordenadas $(0,0,6)$.

Seja M o ponto médio de $[AS]$.

$M\left(\frac{3+0}{2}, \frac{-3+0}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$.

Resposta: $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$

6.2. Volume da esfera: $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4 \times 27\pi}{3} = 36\pi$

$\overline{OS} = 6 = \overline{AB}$ e $\overline{AF} = 2$

Volume do prisma: $\left(\overline{AB}\right)^2 \times \overline{AF} = 6^2 \times 2 = 72$

Volume da peça: $36\pi + 72 \approx 185{,}1$

Resposta: O volume da peça é $185{,}1$.