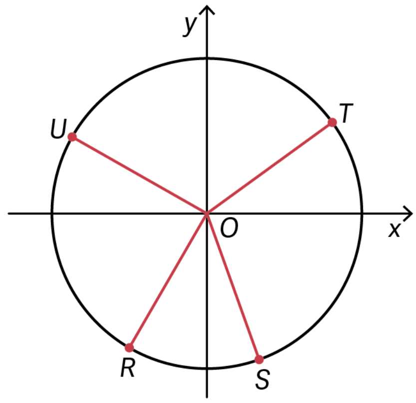
Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [novembro – 2022]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Considera os ângulos orientados representados no círculo trigonométrico da figura e indica, em cada caso, a opção correta.



1.1. O lado extremidade do ângulo de amplitude $-1200°$ pode ser a semirreta:

(A) $\dot{O}R$ **(B)** $\dot{O}S$

(C) $\dot{O}T$ **(D)** $\dot{O}U$

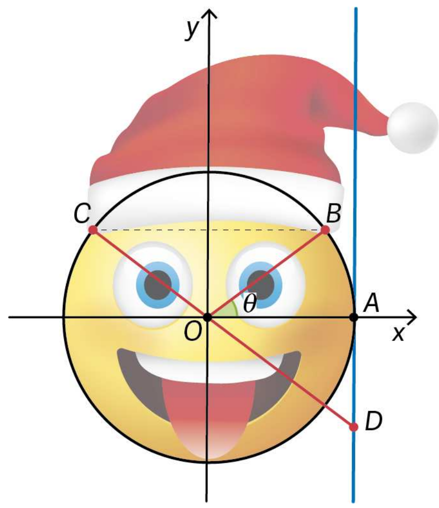
1.2. O lado extremidade do ângulo de amplitude $\frac{21\pi}{5}$ radianos pode ser a semirreta:

(A) $\dot{O}R$ **(B)** $\dot{O}S$

(C) $\dot{O}T$ **(D)** $\dot{O}U$

2. Na figura, sobre um *emoji* de Natal, foi colocado um referencial o.n. *Oxy* e traçada a circunferência trigonométrica de centro *O* e raio 1.
Sabe-se que:

- os pontos *A*, *B* e *C* pertencem à circunferência;
- o ponto *A* tem coordenadas $(1,0)$;
- os pontos *B* e *C* são simétricos em relação ao eixo *Oy*;
- o ponto *D*, de coordenadas $\left(1, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, é a interseção da reta *CO* com a reta definida pela equação $x = 1$;
- a amplitude, em radianos, do ângulo *AOB* é representada por θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Para cada caso, indica a opção correta.

2.1. A abcissa do ponto *C* é:

(A) $-\frac{\sqrt{14}}{3}$ **(B)** $-\frac{9}{14}$ **(C)** $-\frac{3\sqrt{14}}{14}$ **(D)** $-\frac{\sqrt{14}}{9}$

2.2. O valor de $\sin(\pi + \theta)$ é:

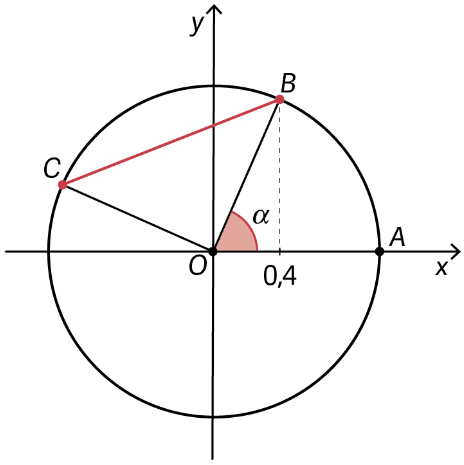
(A) $-\sqrt{\frac{5}{14}}$ **(B)** $\frac{5\sqrt{14}}{14}$ **(C)** $-\frac{5}{15}$ **(D)** $\frac{3\sqrt{14}}{14}$

3. Na figura, em referencial o.n *Oxy*, está representada a circunferência trigonométrica de centro *O* e raio 1.

Sabe-se que :

- *A*, *B* e *C* são pontos da circunferência;
- o ponto *A* tem coordenadas $(1,0)$;
- a abcissa do ponto *B* é 0,4;
- a corda [*BC*] é o lado de um quadrado inscrito na circunferência;
- $A\hat{O}B = \alpha$, em radianos.

Determina a abcissa do ponto *C*.



4. Considera a expressão $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

A qual dos seguintes intervalos pertence *x*, de modo que a expressão dada tome sempre valores negativos?

(A) $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$ **(B)** $]0,\pi[$ **(C)** $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ **(D)** $\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$

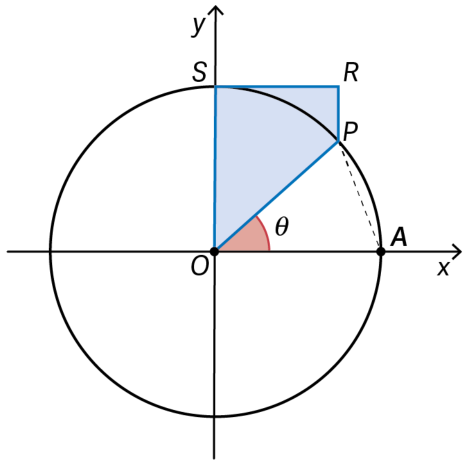
5. Seja *f* a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=1+2\cos x$.

Para cada uma das afirmações seguintes, indica se é verdadeira ou falsa:

$f:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto 1+2\cos x$	**Verdadeira**	**Falsa**
5.1. A função *f* não tem zeros.		
5.2. A função *f* é crescente.		
5.3. A função *f* tem máximo.		
5.4. O contradomínio da função *f* é o intervalo $[-1,3]$.		
5.5. A equação $f(x)=\frac{5}{2}$ tem duas soluções.		

6. Na figura está representada, em referencial o.n. *Oxy*, a circunferência trigonométrica de centro *O* e raio 1.
Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto *P* pertence à circunferência, sendo a amplitude, em radianos, do ângulo *AOP* igual a θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o ponto *S* tem coordenadas $(0,1)$;
- [*OPRS*] é um trapézio retângulo.



6.1. Seja Q o simétrico do ponto *R* em relação ao ponto *O* (origem do referencial).

Se $\theta = \frac{\pi}{3}$ podes concluir que as coordenadas do ponto *Q* são:

(A) $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(B)** $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ **(C)** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ **(D)** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

6.2. Seja *f* a função de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f(\theta)$ representa a área do trapézio [*OPRS*].

a) Mostra que $f(\theta) = \frac{1}{2}\cos(\theta)(2 - \sin(\theta))$.

b) Para um determinado valor de θ a medida da área do triângulo [*OAP*] é $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Determina a medida da área do trapézio [*OPRS*], para esse valor de θ.

c) Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina o valor de θ, em radianos, arredondado às centésimas, para o qual o trapézio [*OPRS*] e o triângulo [*OAP*] são equivalentes, isto é, têm igual área.

Na tua resolução deves apresentar:

- uma equação que traduza o problema;
- num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões), visualizado(s) na calculadora, que te permite(m) resolver a equação, incluindo a janela de visualização;
- a resposta com o arredondamento indicado.

FIM

Cotações										Total
Questões	1.	2.	3.	4.	5.	6.1.	6.2.a)	6.2.b)	6.2.c)	
Cotações	(2×15) 30	(2×15) 30	25	15	(5×5) 25	15	20	20	20	**200**

1.1. $-1200=-3\times 360-120$

O lado extremidade é o mesmo do ângulo de amplitude -120°.

Opção (A)

1.2. $\frac{21\pi}{5}=\frac{20\pi}{5}+\frac{\pi}{5}=4\pi+\frac{\pi}{5}$

O lado extremidade é o mesmo do ângulo de amplitude $\frac{\pi}{5}$ radianos.

Opção (C)

2.1. $tg\left(-\theta\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, ou seja, $tg\left(\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\frac{1}{\cos^2\left(\theta\right)}=1+tg^2\left(\theta\right)\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2\left(\theta\right)}=1+\frac{5}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos^2\left(\theta\right)}=\frac{14}{9}$.

Então, $\cos^2\left(\theta\right)=\frac{9}{14}$ e θ é do 1.º quadrante.

Conclui-se que $\cos\left(\theta\right)=\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

A abcissa de *C* é igual a $-\cos\left(\theta\right)$, ou seja, $-\frac{3\sqrt{14}}{14}$.

Opção (C)

2.2. $\sin\left(\pi+\theta\right)=-\sin\left(\theta\right)$

$\sin^2\left(\theta\right)=1-\cos^2\left(\theta\right)\Leftrightarrow\sin^2\left(\theta\right)=1-\frac{9}{14}\Leftrightarrow\sin^2\left(\theta\right)=\frac{5}{14}$

Como θ é do 1.º quadrante, conclui-se que $\sin\left(\theta\right)=\sqrt{\frac{5}{14}}$, sendo $-\sin\left(\theta\right)=-\sqrt{\frac{5}{14}}$.

Opção (A)

3. Se [*BC*] é lado de um quadrado inscrito na circunferência, então $B\hat{O}C = \frac{\pi}{2}$.

A abcissa de *C* é igual a $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Mas, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$.

Sabe-se ainda que $\cos\alpha = 0,4 = \frac{2}{5}$.

$\sin^2(\alpha) = 1-\cos^2(\alpha) \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = 1-\frac{4}{25} \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = \frac{21}{25}$.

Como α é do 1.º quadrante, conclui-se que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Então, a abcissa de *C* é $-\frac{\sqrt{21}}{5}$.

4. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin(x)\cos(x)$

No intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ (4.º quadrante), tem-se $\sin x < 0$ e $\cos x > 0$.

Conclui-se que, para $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, $\sin(x)\cos(x) < 0$.

Opção (D)

5.1. Verdadeira

5.2. Falsa

5.3. Verdadeira

5.4. Falsa

5.5. Verdadeira

6.1. Se $\theta = \frac{\pi}{3}$ as coordenadas do ponto *R* são $\left(\cos\frac{\pi}{3}, 1\right)$, ou seja, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

As coordenadas do ponto *Q* são $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Opção (B)

6.2.

a) A área do trapézio [*OPRS*] é dada por: $\frac{\overline{OS}+\overline{PR}}{2}\times\overline{SR}$

$$\frac{\overline{OS}+\overline{PR}}{2}\times\overline{SR}=\frac{1+(1-\sin(\theta))}{2}\times\cos(\theta)=\frac{1}{2}\cos(\theta)(2-\sin(\theta))$$

Conclui-se que: $f(\theta)=\frac{1}{2}\cos(\theta)(2-\sin(\theta))$

b) A área do triângulo [*OAP*] é dada por: $\frac{\overline{OA}\times\sin(\theta)}{2}=\frac{\sin(\theta)}{2}$

$$\frac{\sin(\theta)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

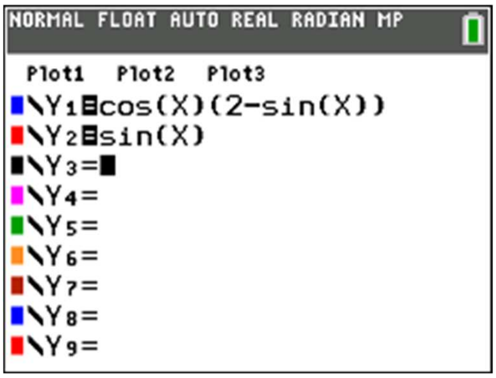
Como $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\theta=\frac{\pi}{4}$.

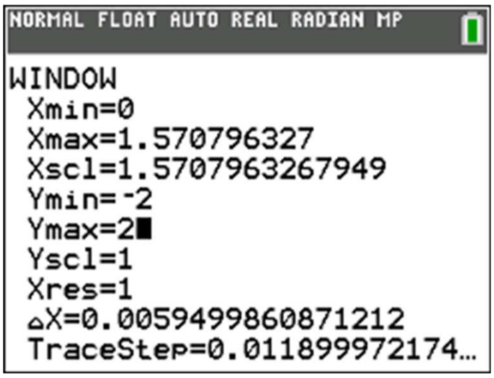
Para este valor de θ, a área do trapézio é dada por $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

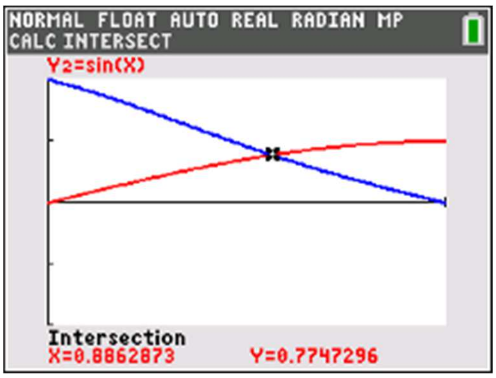
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(2-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$$

c) A solução do problema é o valor de $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ que é solução da equação:

$$f(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{2}\text{, ou seja, }\frac{1}{2}\cos(\theta)(2-\sin(\theta))=\frac{\sin(\theta)}{2}\Leftrightarrow\cos(\theta)(2-\sin(\theta))=\sin(\theta)$$







$\theta\approx 0{,}89$ rad

FIM

Cotações										Total
Questões	1.	2.	3.	4.	5.	6.1.	6.2.a)	6.2.b)	6.2.c)	
Cotações	$(2\times15$ 30	$(2\times15$ 30	25	15	(5×5) 25	15	20	20	20	**200**