Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

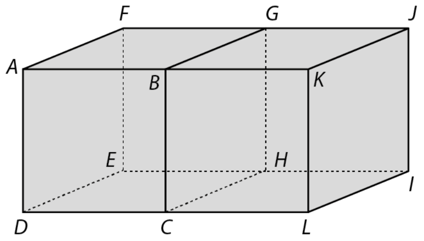
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere o prisma quadrangular regular representado na figura, dividido em dois cubos geometricamente iguais.



1.1. Qual das seguintes opções apresenta uma proposição verdadeira?

(A) $\overrightarrow{DJ}$ e $\overrightarrow{FL}$ são vetores simétricos. **(B)** $D + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DB}$

(C) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ **(D)** $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{JL}\|$

1.2. Qual é o valor real de k que satisfaz a condição $\overrightarrow{HE} = k\,\overrightarrow{DL}$?

(A) -2 **(B)** **(C)** 2 **(D)** $-\frac{1}{2}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

2. Fixado um referencial o.n. do plano, considere a seguinte condição:

$$3x - y \leq 5 \quad \wedge \quad -x - 3 \leq 0 \quad \wedge \; -5 \leq y \leq 2$$

Sabe-se que a representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição anterior é um trapézio.

Sem recorrer à calculadora, represente-o num referencial e determine o valor exato da sua área.

3. Considere, num referencial o.n. do espaço, a reta r definida por:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$$

Qual das condições seguintes define uma reta paralela à reta r?

(A) $x = 2022 \;\wedge\; y = 2023$ **(B)** $y = 2022 \;\wedge\; z = 2023$

(C) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + k(1, 2, 3), k \in \mathbb{R}$ **(D)** $(x, y, z) = (0, 2022, 2023) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$

4. Fixado um referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos A e B de coordenadas $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{12}\right)$ e $\left(0, \sqrt{8}, 2\sqrt{3}\right)$, respetivamente.

4.1. Em relação à superfície esférica de diâmetro $[AB]$, considere as seguintes afirmações:

I. O centro da superfície esférica é o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$.

II. O raio da superfície esférica é $3^{\frac{1}{2}}$.

Em relação às afirmações anteriores, podemos concluir que:

(A) são ambas verdadeiras. **(B)** são ambas falsas.

(C) apenas a afirmação I é verdadeira. **(D)** apenas a afirmação II é verdadeira.

4.2. Defina por uma condição:

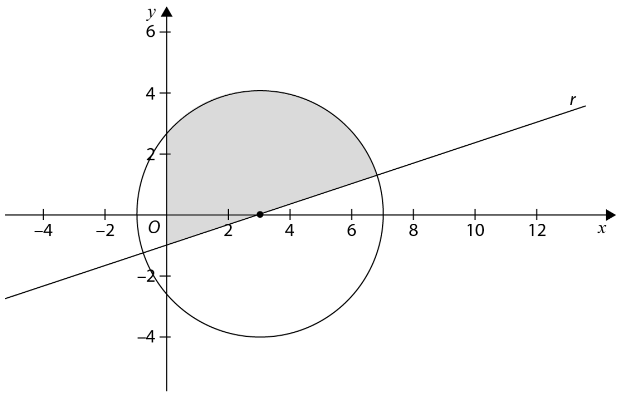
4.2.1. a reta AB.

4.2.2. o conjunto de pontos do espaço equidistantes de A e B.
Apresente a condição na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

4.2.3. a superfície esférica de centro no ponto B e tangente ao plano xOy.

4.2.4. o conjunto de pontos do espaço que estão a uma distância do ponto A inferior ou igual a 3 unidades.

5. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela condição $x^2 + y^2 - 6x = 7$ e a reta r que passa pelos pontos de coordenadas $(3, 0)$ e $(0, -1)$.



5.1. Prove que a circunferência tem como centro o ponto de coordenadas $(3, 0)$ e raio 4.

5.2. Qual das seguintes expressões define o conjunto de pontos da região a sombreado (incluindo a fronteira)?

(A) $(x-3)^2 + y^2 \leq 16 \ \wedge \ y \geq 3x - 1 \ \wedge \ y \geq 0$

(B) $(x-3)^2 + y^2 \leq 16 \ \wedge \ y \leq 3x - 1 \ \wedge \ x \geq 0$

(C) $(x-3)^2 + y^2 \leq 16 \ \wedge \ y \geq \frac{1}{3}x - 1 \ \wedge \ x \geq 0$

(D) $(x-3)^2 + y^2 \leq 16 \ \wedge \ y \leq \frac{1}{3}x - 1 \ \wedge \ y \geq 0$

5.3. Considere a coroa circular que se obtém com a circunferência da figura e com outra circunferência de raio r, com $r < 4$. Sabe-se que a área desta coroa circular é 7π.
Sem recorrer à calculadora, determine as coordenadas dos pontos de interseção das circunferências que limitam a coroa com a bissetriz dos quadrantes pares.

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.1**	**4.2.2.**	**4.2.3.**	**4.2.4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**TOTAL**
10	10	25	10	10	15	20	20	20	25	10	25	**200**

Teste N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (D)

Na opção (A) encontra-se uma proposição falsa, pois os vetores não têm a mesma direção e sentidos opostos.

Na opção (B) encontra-se uma proposição falsa, pois a soma de um ponto com um vetor é um ponto e não um vetor. Neste caso, $D + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ} = C + \overrightarrow{IJ} = B$.

Na opção (C) também se encontra uma proposição falsa, pois $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{GH}$ são vetores não nulos e não são vetores simétricos, são vetores iguais, logo $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.

Na opção (D) encontra-se uma proposição verdadeira, pois, apesar de os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{JL}$ serem diferentes, a sua norma é igual à medida da diagonal facial dos cubos da figura.

1.2. Opção (C)

Dadas as condições da figura, tem-se que $\overrightarrow{HE}$ é um vetor com a mesma direção de $\overrightarrow{DL}$, sentido contrário e metade da norma. Assim, $\overrightarrow{HE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DL}$.

2. $3x - y \leq 5 \ \wedge\ -x - 3 \leq 0 \ \wedge\ -5 \leq y \leq 2$

$\Leftrightarrow -y \leq -3x + 5 \ \wedge\ -x \leq 3 \ \wedge\ -5 \leq y \leq 2$

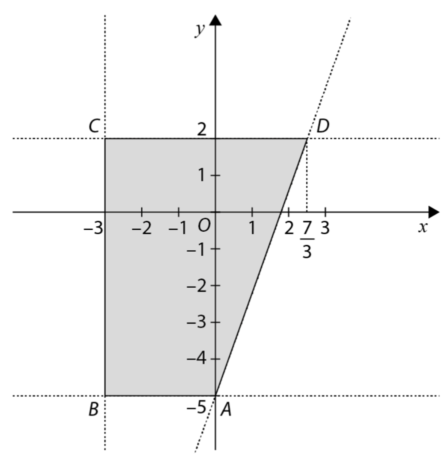
$\Leftrightarrow y \geq 3x - 5 \ \wedge\ x \geq -3 \ \wedge\ -5 \leq y \leq 2$

Cálculos auxiliares

$A(0,-5)$ $B(-3,-5)$ $C(-3,2)$ $D\left(\frac{7}{3},2\right)$

Se $y = 2$, então:

$2 = 3x - 5 \Leftrightarrow 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$



$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{CD} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{\left(\frac{7}{3}+3\right)+3}{2} \times 7 =$$

$$= \frac{\frac{16}{3}+3}{2} \times 7 =$$

$$= \frac{25}{6} \times 7 =$$

$$= \frac{175}{6}$$

3. Opção (B)

A reta r de vetor diretor $(1,0,0)$ é uma reta paralela ao eixo das abcissas.

Das opções apresentadas, apenas na opção **(B)** se encontra uma reta paralela a Ox.

4.

4.1. Opção (C)

- A afirmação I é verdadeira, pois o centro da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o ponto médio de $[AB]$. Assim, tem coordenadas:

$\left(\frac{1+0}{2},\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{2},\ \frac{\sqrt{12}+2\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2},\ \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2},\ 2\sqrt{3}\right)$.

- A afirmação II é falsa, pois o raio é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$ e:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{12}-2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

Logo, o raio = $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}$.

4.2.

4.2.1. $(x,y,z) = \left(1,\sqrt{2},\sqrt{12}\right) + k\left(-1,\sqrt{2},0\right), k \in \mathbb{R}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0,\sqrt{8},2\sqrt{3}\right) - \left(1,\sqrt{2},\sqrt{12}\right) = \left(-1,\sqrt{2},0\right)$

4.2.2. O conjunto de pontos equidistantes de *A* e de *B* é o plano mediador de $[AB]$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador de $[AB]$. Então, $d(P,A) = d(P,B)$.

Logo:

$$\sqrt{(x-1)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 + \left(z-\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y-\sqrt{8}\right)^2 + \left(z-2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 + z^2 - 2\sqrt{12}z + 12 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{8}y + 8 + z^2 - 4\sqrt{3}z + 12$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{8}y - 2\sqrt{12}z + 4\sqrt{3}z + 15 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2\sqrt{2}y + 4\sqrt{2}y - 4\sqrt{3}z + 4\sqrt{3}z - 5 = 0$$

- $$\Leftrightarrow -2x + 2\sqrt{2}y - 5 = 0$$

4.2.3. Raio = cota de $B = 2\sqrt{3}$

$$(x-0)^2 + \left(y-\sqrt{8}\right)^2 + \left(z-2\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + \left(y-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(z-2\sqrt{3}\right)^2 = 12$$

4.2.4. O conjunto de pontos do espaço que estão a uma distância do ponto A inferior ou igual a 3 unidades é uma esfera de centro em A e raio 3:

$$(x-1)^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z-\sqrt{12})^2 \leq 9$$

5.

5.1. $x^2 + y^2 - 6x = 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 + y^2 = 7 + 3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 16$

Equação da circunferência de centro (3, 0) e raio 4.

5.2. Opção (C)

> **Cálculos auxiliares**
>
> A equação da reta que passa nos pontos de coordenadas (3, 0) e (0, −1) é $y = mx + b$, onde:
>
> • $m = \frac{-1-0}{0-3} = \frac{1}{3}$
>
> • $b = -1$
>
> Assim, $y = \frac{1}{3}x - 1$.

5.3. Seja C_1 a circunferência de centro (3, 0) e raio 4 e C_2 a circunferência de centro (3, 0) e raio r, com $r < 4$.

C_1 tem área $\pi \times 4^2 = 16\pi$.

C_2 tem área $\pi \times r^2$.

Para que 7π seja a área da coroa circular tem de se verificar $16\pi - \pi \times r^2 = 7\pi$, logo $\pi \times r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = 9$, ou seja, $r = 3$.

A equação de C_2 é $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

- Sejam P_1 e P_2 os pontos da interseção de C_1 com a bissetriz dos quadrantes pares:

$$(x-3)^2 + y^2 = 16 \ \wedge \ y = -x$$

Assim:

$$(x-3)^2 + (-x)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 2 \times (-7)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{23}}{2} \ \vee \ x = \frac{-3-\sqrt{23}}{2}$$

Logo, $P_1\left(\frac{3+\sqrt{23}}{2}, -\frac{3+\sqrt{23}}{2}\right)$ e $P_2\left(\frac{3-\sqrt{23}}{2}, -\frac{3-\sqrt{23}}{2}\right)$.

- Sejam P_3 e P_4 os pontos da interseção de C_2 com a bissetriz dos quadrantes pares:

$$(x-3)^2 + y^2 = 9 \ \wedge y = -x \Leftrightarrow (x-3)^2 + (-x)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \ \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee x = 3$$

Logo, P_3 (0, 0) e P_4 (3, −3).