

Propostas de resolução e de distribuição de pontuações

Apresentam-se, a seguir, propostas de resolução das tarefas de diagnóstico, assim como as respetivas propostas de pontuações dos passos dessas resoluções. Compara o teu trabalho com as resoluções apresentadas e procede à autoavaliação, atribuindo os pontos relativos às tuas resoluções. Em alguns casos, podes ter apresentado resoluções alternativas, mas também corretas, pelo que as deves pontuar de forma equivalente.

Em casos de dúvida, consulta o(a) teu(tua) professor(a).

TEMA: Geometria – Trigonometria

1. (B) [5 pontos]

2.1 [10 pontos]

$$\tan(30^\circ) = \frac{x}{4} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \times \tan(30^\circ) \approx 2,31 \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{4}{y} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{\cos(30^\circ)} \approx 4,62 \quad (2 \text{ pontos})$$

2.2 [10 pontos]

$$\bullet \quad \cos(x) = \frac{4,9}{6,4} \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{4,9}{6,4}\right) \approx 40,04^\circ \quad (4 \text{ pontos})$$

$$\bullet \quad y^2 + 4,9^2 = 6,4^2 \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 16,95 \quad (1 \text{ ponto})$$

$$y = \sqrt{16,95} \approx 4,12 \quad (1 \text{ ponto})$$

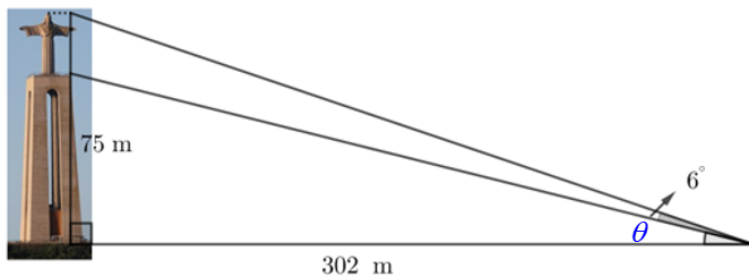
3. [10 pontos]

$$\operatorname{tg}(\hat{U\hat{S}T}) = \frac{\overline{UT}}{\overline{ST}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\hat{U\hat{S}T}) = \frac{0,18}{2,58} \quad (4 \text{ pontos})$$

$$\operatorname{tg}(\hat{U\hat{S}T}) \approx 0,0698, \text{ logo } \hat{U\hat{S}T} \approx 4^\circ \quad (4 \text{ pontos})$$

Como $\hat{U\hat{S}T} < 4,6^\circ$, a rampa cumpre o requisito. **(2 pontos)**

4. [10 pontos]



$$\tan(\theta) = \frac{75}{302} \quad \theta \approx 13,947^\circ \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\theta + 6^\circ \approx 19,947^\circ \quad (1 \text{ ponto})$$

$$\tan(19,947^\circ) = \frac{h}{302} \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow h = 302 \times \tan(19,947^\circ) \quad (2 \text{ pontos})$$

$$h \approx 110 \text{ m} \quad (2 \text{ pontos})$$

5. [10 pontos]

$$\sin \alpha = 0,6 \Leftrightarrow \frac{\text{cateto oposto}}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \text{cateto oposto} = \frac{30}{10} \Leftrightarrow \text{cateto oposto} = 3$$

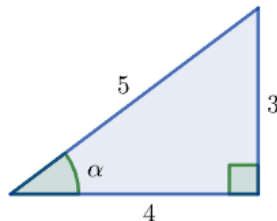
(2 pontos)

Logo, pelo teorema de Pitágoras, o cateto adjacente mede 4 unidades. (2 pontos)

Portanto, tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} \quad (3 \text{ pontos})$$



TEMA: Geometria analítica

6. (C) [5 pontos]

7. (D) [5 pontos]

8. (C) [5 pontos]

9. (C) [5 pontos]

10. [6 pontos]

O raio é $\sqrt{2}$ (2 pontos) e as coordenadas do centro são $(3, -4)$ (4 pontos).

11.1 [6 pontos]

$$\overline{PQ} = \sqrt{(0+4)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$A_{[PQRS]} = 20 \quad (3 \text{ pontos})$$

11.2 [6 pontos]

$$\overrightarrow{QR}(2, 4) \quad (1 \text{ ponto})$$

$$S = P + \overrightarrow{QR} \quad (3 \text{ pontos})$$

As coordenadas são

$$(-4+2, 0+4) \quad (1 \text{ ponto})$$

$$= (-2, 4) \quad (1 \text{ ponto})$$

11.3 [6 pontos]

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 3 \quad (2 \text{ pontos})$$

11.4 [6 pontos]

$$m = \frac{0+2}{-4-0} = -\frac{1}{2} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$b = -2 \quad (1 \text{ ponto})$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \quad (2 \text{ pontos})$$

11.5 [8 pontos]

Coordenadas do centro: $\left(\frac{-4+2}{2}; \frac{0+2}{2}\right) = (-1, 1)$ (2 pontos)

$$\text{Raio: } \frac{\overline{PR}}{2} = \frac{\sqrt{(-4-2)^2 + (0-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\text{Equação: } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad (3 \text{ pontos})$$

11.6 [10 pontos]

O ponto T é o ponto de interseção da circunferência de centro em Q e raio 5 com a circunferência de centro em R e raio 5, que pertence ao 4.º quadrante.

$$\text{Circunferência de centro em } Q \text{ e raio } 5: \quad x^2 + (y+2)^2 = 25 \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\text{Circunferência de centro em } R \text{ e raio } 5: \quad (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25 \quad (2 \text{ pontos})$$

Coordenadas de T :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 25 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \\ \text{_____} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ (1 - 2y - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ y = -2 \vee y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \quad (5 \text{ pontos}) \\ &\quad \text{Imp. } (T \in 4.^\circ \text{Q}) \end{aligned}$$

$$T(5, -2) \quad (1 \text{ ponto})$$

12.1 [7 pontos]

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{ou } \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}) \quad (4 \text{ pontos})$$

$$\vec{b} = \sqrt{3} \vec{a}, \text{ logo os vetores são colineares. } (3 \text{ pontos})$$

12.2 [7 pontos]

$$\vec{b} - \vec{a} \text{ tem coordenadas } (\sqrt{3} + 1, -2\sqrt{3} - 2, 3 + \sqrt{3}) \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\|\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + (-2\sqrt{3} - 2)^2 + (3 + \sqrt{3})^2} \quad (1 \text{ ponto})$$

$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 12 + 8\sqrt{3} + 4 + 9 + 6\sqrt{3} + 3} \quad (2 \text{ pontos})$$

$$= \sqrt{32 + 16\sqrt{3}} \quad (1 \text{ ponto})$$

12.3 [7 pontos]

$$\|\vec{c}\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2 + 4^2} = 5 \quad (3 \text{ pontos})$$

O vetor colinear ao vetor $\vec{c}$, com o sentido contrário ao deste e norma 10 é $-2\vec{c}$, ou seja, tem coordenadas $(-2\sqrt{5}, 4, -8)$. (4 pontos)

13.1 [6 pontos]

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2} \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 2z + 1 \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow x - 6y - 3z = -1 \quad (1 \text{ ponto})$$

13.2 [6 pontos]

Vetor diretor $(\overrightarrow{BG})$: $(4-1, -21-(-3), 36-(-1)) = (3, -18, 37)$. (3 pontos)

Equação: $(x, y, z) = (0, 3, 2) + k(3, -18, 37)$, $k \in \mathbb{R}$ (3 pontos)

13.3 [6 pontos]

Determinar as coordenadas de dois dos seguintes vetores (ou simétricos): $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GH}$ e $\overrightarrow{BG}$. (1 ponto + 1 ponto)

$C = H + \overrightarrow{GB}$ tem coordenadas

$$(-2 + (-3), -22 + 18, 36 + (-37)) = (-5, -4, -1) \quad (1 \text{ ponto})$$

$D = A + \overrightarrow{GH}$ tem coordenadas

$$(0 + (-6), 3 + (-1), 2 + 0) = (-6, 2, 2) \quad (1 \text{ ponto})$$

$E = D + \overrightarrow{BG}$ tem coordenadas

$$(-6 + 3, 2 + (-18), 2 + 37) = (-3, -16, 39) \quad (1 \text{ ponto})$$

$F = A + \overrightarrow{BG}$ tem coordenadas

$$(0 + 3, 3 + (-18), 2 + 37) = (3, -15, 39) \quad (1 \text{ ponto})$$

13.4 [8 pontos]

Coordenadas do centro $(M_{[AH]})$: $\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{3+(-22)}{2}, \frac{2+36}{2}\right) = \left(-1, -\frac{19}{2}, 19\right)$ (2 pontos)

$$\text{Raio: } \frac{\overline{AH}}{2} = \frac{\sqrt{(-2-0)^2 + (-22-3)^2 + (36-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{1785}}{2} \quad (3 \text{ pontos})$$

$$\text{Condição: } (x+1)^2 + \left(y + \frac{19}{2}\right)^2 + (y-19)^2 \leq \frac{1785}{4} \quad (3 \text{ pontos})$$

TEMA: Matemática discreta – Sucessões

14. (D) [5 pontos]

15. (C) [5 pontos]

16.1 [5 pontos]

$$u_1 = 1^2 - 1 = 0, u_2 = 2^2 - 1 = 3, u_3 = 3^2 - 1 = 8, u_4 = 4^2 - 1 = 15, u_5 = 5^2 - 1 = 24 \quad (5 \text{ pontos})$$

16.2 [8 pontos]

$$u_n = 99 \Leftrightarrow n^2 - 1 = 99 \quad (3 \text{ pontos})$$

$$n = 10 \quad (3 \text{ pontos})$$

99 é o 10.º termo da sucessão. (2 pontos)

17. [6 pontos]

$1 \in \mathbb{N}^+$, mas não pertence ao domínio de validade da expressão $\frac{1}{n-1}$. (6 pontos)

TEMA: Funções

18.1 (D) [5 pontos]

18.2 [6 pontos]

x	-3		-2		-1		0
$g(x)$	2	+	2	-	0	+	N.D.

19. (A) [5 pontos]

20.1.1 [5 pontos]

$$D_f = [-3, 3] \quad (2 \text{ pontos})$$

$$CD_f =]-3, 2] \quad (3 \text{ pontos})$$

20.1.2 [5 pontos]

$$\{-1, 1, 2\} \quad (5 \text{ pontos})$$

20.1.3 [5 pontos]

Crescente em $] -2, 0]$ e $[2, 3]$ (2 pontos)

Decrescente em $[0, 2[$ (2 pontos)

Constante em $[-3, -2]$ (1 ponto)

20.1.4 [5 pontos]

Máximos relativos:

1 ; maximizantes: 0 (1 ponto)

2 ; maximizantes: $[-3, -2]$ e 3 (2 pontos)

Mínimo relativo: 2 ; minimizantes: $[-3, -2[$ (2 pontos)

20.1.5 [5 pontos]

Voltada para baixo. (5 pontos)

20.2 [5 pontos]

Não, (2 pontos)

porque há intervalos em que é constante, intervalos em que é crescente e intervalos em que é decrescente. (3 pontos)

20.3.1 [5 pontos]

$$x \in [-3, 2] \cup \{3\} \quad (5 \text{ pontos})$$

20.3.2 [5 pontos]

$$f(x) = -3 \quad (1 \text{ ponto})$$

$$\Leftrightarrow x \in \{ \} \quad (4 \text{ pontos})$$

20.3.3 [5 pontos]

$$x \in [-3, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3] \quad (5 \text{ pontos})$$

20.4 [10 pontos]

- Equação da reta que contém o segmento de reta horizontal

$$y = 2 \quad (1 \text{ ponto})$$

- Equação da reta que contém o segmento de reta não horizontal

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

$$0 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -4$$

$$y = 2x - 4 \quad (2 \text{ pontos})$$

- Equação da parábola que contém o arco de parábola

O vértice da parábola tem coordenadas $(0, 1)$. (1 ponto)

$$y = a(x - 0)^2 + 1$$

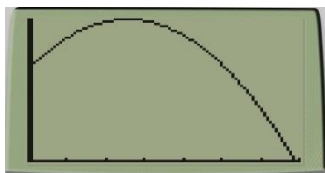
$$0 = a \times 1^2 + 1 \Leftrightarrow a = -1$$

$$y = -x^2 + 1 \quad (3 \text{ pontos})$$

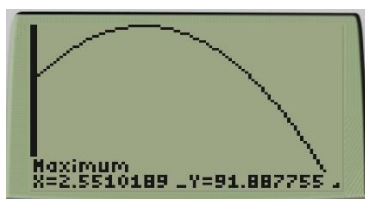
- Expressão analítica de f

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -3 \leq x \leq -2 \\ -x^2 + 1 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (3 \text{ pontos})$$

21.1.1 [5 pontos]



21.1.2 [5 pontos]

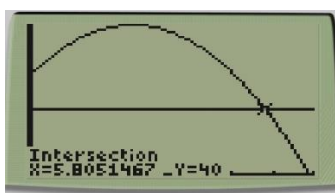


Contradomínio: $[0; 91,9]$ (1 c.d.) (3 pontos)

A altura do projétil varia entre 0 m e 91,9 m (aproximadamente). (2 pontos)

21.2 [10 pontos]

$$h(t) > 40 \quad (2 \text{ pontos})$$



(7 pontos)

A altura foi superior a 40 metros durante 5,8 segundos. (1 ponto)

21.3 [10 pontos]

$$h(t) > 0 \quad (2 \text{ pontos})$$

Zeros:

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 25t + 60 = 0 \quad (2 \text{ pontos})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times (-4,9) \times 60}}{2 \times (-4,9)} \Leftrightarrow t \approx 6,9 \vee \underbrace{t \approx -1,8}_{\text{Imp.}} \quad (2 \text{ pontos})$$

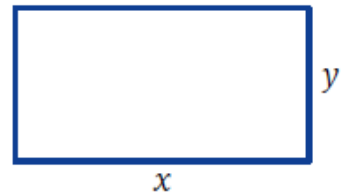
A parábola tem concavidade voltada para baixo, logo

$$h(t) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 6,9 \text{ (1c.d.)} \quad (3 \text{ pontos})$$

O corpo esteve em movimento durante, aproximadamente, 6,9 segundos. (1 ponto)

22. [10 pontos]

Sendo x a medida, em cm, de dois lados opostos do retângulo e y , a medida, em cm, dos outros dois lados do retângulo, tem-se que $2x + 2y = 30 \Leftrightarrow x + y = 15 \Leftrightarrow y = 15 - x$. (1 ponto)



Tem-se que $x > 0$ e $y > 0$, pelo que $15 - x > 0 \Leftrightarrow x < 15$, pelo que $0 < x < 15$. (1 ponto)

A área do retângulo é dada por xy , pelo que, sendo S a função que dá a área do retângulo em função de x , tem-se que $S(x) = x(15 - x) = 15x - x^2$, com $0 < x < 15$. (3 pontos)

O gráfico da função S é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo. O máximo é a ordenada do vértice da parábola, caso a abcissa correspondente pertença ao domínio de S $]0, 15[$.

Cálculo da abcissa do vértice:

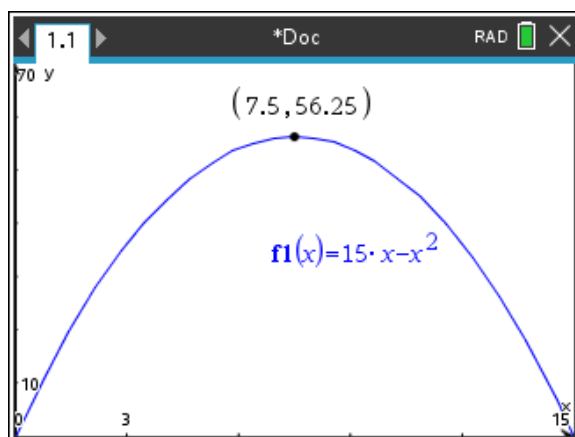
$$15x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(15 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 15 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 15 \quad (1 \text{ pontos})$$

A abcissa do vértice é $\frac{0+15}{2} = 7,5$ (pertence ao domínio da função). (2 pontos)

Uma das dimensões é 7,5 cm e a outra é $y = 15 - 7,5 = 7,5$ cm, pelo que, o retângulo nestas condições é um quadrado. (2 pontos)

Podíamos ter usado a calculadora.

(3 pontos, referente ao cálculo da abcissa do vértice, 1 + 2 pontos)



Uma das dimensões é 7,5 cm e a outra é $y = 15 - 7,5 = 7,5$ cm, pelo que o retângulo nestas condições é um quadrado. (2 pontos)