

**Teste de avaliação n.º 2****Matemática A****11.º ANO DE ESCOLARIDADE****Nome:****| N.º:****| Turma:****Duração do teste:** 90 minutos**| Tolerância:** 10 minutos**| Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Num torneio de *drones*, cada piloto programa duas trajetórias consecutivas, definindo dois vetores no espaço,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

O sistema de navegação regista automaticamente o produto escalar entre os vetores que definem o movimento do *drone*, de modo a avaliar o estilo de pilotagem de cada piloto.

Durante uma etapa do torneio, foram obtidos os seguintes resultados:

| Piloto | $\vec{u} \cdot \vec{v}$ |
|--------|-------------------------|
| Ana    | 12                      |
| Bruno  | 0                       |
| Carlos | -8                      |

Com base nas propriedades do produto escalar, qual das afirmações seguintes pode ser verdadeira?

- (A) O *drone* da Ana descreveu duas trajetórias perpendiculares.
- (B) O *drone* do Bruno manteve o sentido nas duas trajetórias.
- (C) O *drone* do Carlos fez um ângulo obtuso entre as duas trajetórias.
- (D) Todos os *drones* formaram ângulos agudos entre as suas trajetórias.

2. Considere as proposições seguintes:

I. se  $\alpha$  for a amplitude de um ângulo orientado tal que  $\cos \alpha < 0$  e  $\tan \alpha > 0$ , então podemos concluir que:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

II. se  $\alpha$  e  $\beta$  forem as inclinações de duas retas perpendiculares, então, podemos concluir que:

$$\beta = \alpha + 90^\circ$$

Justifique que as duas proposições não são necessariamente verdadeiras.

3. Na figura pode observar um relógio que marca, nesse instante, 10 h 11 m 00 s.



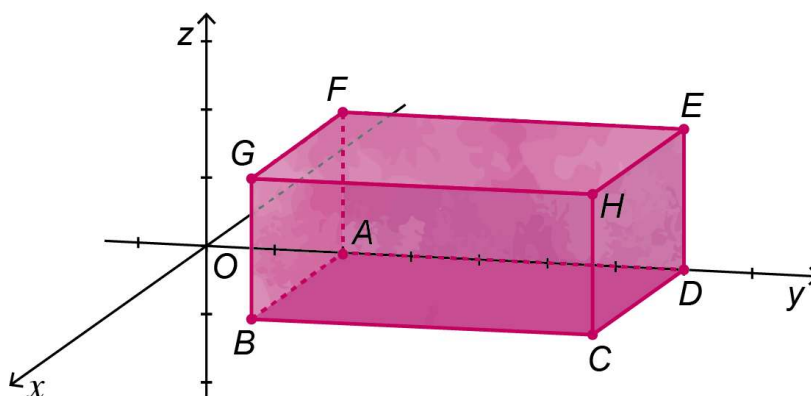
Sabe-se que:

- o ponto  $O$ , é o ponto de interseção dos ponteiros do relógio;
- o ponto  $A$ , é a extremidade do ponteiro das horas mais longe de  $O$ ;
- o ponto  $B$ , é a extremidade do ponteiro dos minutos mais longe de  $O$ ;
- $\overline{OB} = 1,2 \overline{OA} = 12 \text{ cm}$

Determine  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BO}$ .

Apresente a resposta arredondada às décimas.

4. Na figura encontra-se representado em referencial o. n.  $Oxyz$  o paralelepípedo  $[ABCDEFGH]$ .



Sabe-se que:

- as faces do sólido são paralelas a um dos planos coordenados;
- a aresta  $[AD]$  está contida no eixo  $Oy$ ;
- a face  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$  e é um quadrado;
- a cota do ponto  $F$  é  $z_0$ , com  $z_0 > 0$ .

Mostre que  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BE} = (z_0)^2$ .

5. Considere, em referencial o. n.  $Oxy$  as retas  $r$  e  $s$  e o ponto  $P$ .

Sabe-se que:

- $r: (x, y) = (-2, 4) + k(3, -2), k \in \mathbb{R}$
- $s: x - 2y = 2$
- o ponto  $P$  pertence a  $r$  e ao eixo  $Ox$ .

Mostre que a distância de  $P$  a  $s$  é  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

6. Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \sin(\pi - x) + \sin(2\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$$

6.1. Mostre que  $f(x) = \sin(x) - 2\cos(x)$ .

6.2. Sabendo que  $\tan \beta = \frac{3}{4}$  e que  $\beta \in ]-\pi, 0[$ , determine  $f(\beta)$ .

7. Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = 2 + 2 \sin(2(x - 2))$$

Considere as seguintes transformações gráficas:

- I. Dilatação vertical de coeficiente 2
- II. Contração horizontal de coeficiente  $2^{-1}$
- III. Translação horizontal associada ao vetor  $(2, 0)$
- IV. Translação vertical associada ao vetor  $(0, 2)$

Qual é a ordem possível das transformações gráficas sucessivas que permitem obter o gráfico de  $f$  partindo do gráfico da função definida por  $y = \sin x$ ?

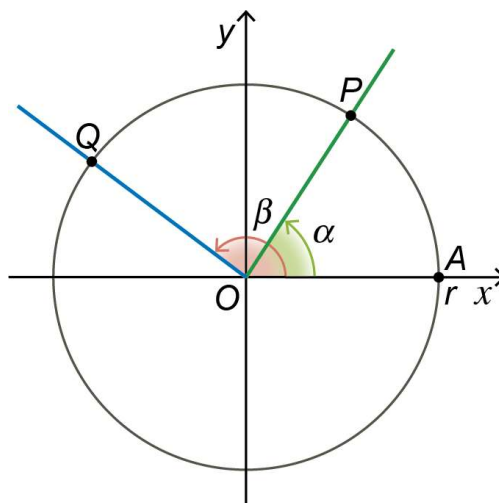
(A) IV – I – II – III

(B) III – II – I – IV

(C) II – IV – III – I

(D) I – II – III – IV

8. Considere a circunferência centrada na origem que passa pelo ponto  $A(r, 0)$ ,  $r > 0$ , representada na figura.



Sabe-se que  $P$  e  $Q$  são os pontos da circunferência tais que  $\vec{OP}$  e  $\vec{OQ}$  fazem um ângulo de amplitude  $\alpha$  e  $\beta$  com o semieixo positivo  $Ox$ , respetivamente.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II e III, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

As coordenadas do ponto  $P$  são  I .

Se  $r = 2$  e a abcissa de  $Q$  é  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ , então,  $\cos \beta =$   II .

III  é a razão entre o produto escalar dos vetores  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$  e  $r^2$ .

| I                                   | II                       | III                                                  |
|-------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------|
| a) $(\cos \alpha, \sin \alpha)$     | a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | a) $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ |
| b) $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ | b) $-\sqrt{3}$           | b) $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$ |
| c) $(r \sin \alpha, r \cos \alpha)$ | c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ | c) $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ |

9. Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$  por

$$f(x) = a + b \cos(c(x - d)),$$

em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são números reais.

9.1. Seja  $a = 0$ .

Sabe-se que  $f$  muda de sinal nos pontos de abcissa da forma:

$$x = \pi + 4k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Qual dos seguintes valores é o período fundamental de  $f$ ?

(A)  $\pi$

(B)  $2\pi$

(C) 4

(D) 8

9.2. Seja  $a = c = 1$ ,  $b = -1$  e  $d = 0$ .

Determine as abcissas dos pontos do gráfico de  $f$ , em  $[0, 2\pi[$ , com ordenada igual a  $\frac{1}{2}$ .

10. Considere a função  $f$ , de domínio  $D$ , definida por:

$$f(x) = \tan\left(mx - \frac{\pi}{3}\right)$$

em que  $m$  é um número real positivo.

Sabendo que a diferença entre dois valores reais que não pertencem a  $D$  é  $\frac{\pi}{2}$ , qual é o valor de  $m$ ?

(A)  $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 2

(D) 3

**11.** Numa feira popular, uma roda-gigante completa uma volta em 4 minutos.

A altura  $h$ , em metros, de um ponto de uma determinada cadeira em relação ao chão,  $t$  minutos após o início do movimento, é modelada por:

$$h(t) = 15 + 15 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

O operador da atração popular quer saber em que instantes, na primeira volta completa após o início do movimento, a altura do ponto da cadeira, um minuto antes, era metade da altura do ponto da cadeira nesses instantes.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a resposta ao problema.

Apresente a resposta em minutos e segundos, arredondando os segundos às unidades.

Na sua resposta deve:

- apresentar uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permita(m) resolver a equação;
- apresentar as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

**FIM**

### COTAÇÕES

| Item                |    |    |    |    |      |      |    |    |      |      |     |     |            |
|---------------------|----|----|----|----|------|------|----|----|------|------|-----|-----|------------|
| Cotação (em pontos) |    |    |    |    |      |      |    |    |      |      |     |     |            |
| 1.                  | 2. | 3. | 4. | 5. | 6.1. | 6.2. | 7. | 8. | 9.1. | 9.2. | 10. | 11. | Total      |
| 10                  | 15 | 15 | 20 | 20 | 20   | 20   | 10 | 10 | 10   | 20   | 10  | 20  | <b>200</b> |

## SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

- ângulo agudo  $\rightarrow$  produto escalar positivo
- vetores perpendiculares  $\rightarrow$  produto escalar nulo
- ângulo obtuso  $\rightarrow$  produto escalar negativo

Opção (C)

2.

I. Como  $\cos \alpha < 0$  e  $\tan \alpha > 0$ , então  $\alpha$  pertence ao 3.º quadrante, pelo que  $\sin \alpha < 0$ .

Como  $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} > 0$ , concluímos que

$$\sin \alpha \neq \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

II. Se  $\alpha = 120^\circ$ , a reta perpendicular tem inclinação  $30^\circ (= 120^\circ - 90^\circ)$  e não  $210^\circ (= 120^\circ + 90^\circ)$ , como é referido.

3.

O ponteiro das horas já passou  $\frac{11}{60}$  minutos das 10 h, no sentido das 11 h:

$$30^\circ - \frac{11}{60} \times 30^\circ = 24,5^\circ$$

O ponteiro dos minutos já passou 11 min da hora certa:

$$11 \times 6^\circ = 66^\circ$$

Logo,  $B\hat{O}A = 24,5^\circ + 30^\circ + 66^\circ = 120,5^\circ$ .

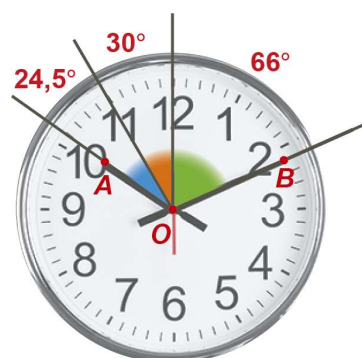
$$\overline{OB} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{OA} = \frac{12}{1,2} = 10 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(B\hat{O}A) = \\ &= -10 \times 12 \times \cos(120,5^\circ) \approx 60,9 \end{aligned}$$

$$1 \text{ h} \rightarrow \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$1 \text{ min} \rightarrow \frac{30^\circ}{5} = 6^\circ$$



4. Designando por  $a$  o comprimento do quadrado  $[ABCD]$  e por  $y_A$  a ordenada de  $A$ , tem-se:

- $A(0, y_A, 0)$ ,  $H(a, y_A + a, z_0)$ , logo,  $\overrightarrow{AH} = H - A = (a, y_A + a, z_0) - (0, y_A, 0) = (a, a, z_0)$
- $B(a, y_A, 0)$ ,  $E(0, y_A + a, z_0)$ , logo,  $\overrightarrow{BE} = E - B = (0, y_A + a, z_0) - (a, y_A, 0) = (-a, a, z_0)$

Assim:

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BE} = (a, a, z_0) \cdot (-a, a, z_0) = -a^2 + a^2 + (z_0)^2 = (z_0)^2$$

5.

- Coordenadas do ponto  $P(x, 0)$

$$\begin{cases} x = -2 + 3k \\ 0 = 4 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3k \\ 2k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3 \times 2 \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$P(4, 0)$$

- Equação da reta  $p$ , perpendicular a  $s$ , que passa em  $P$

$$x - 2y = 2 \Leftrightarrow -2y = -x + 2 \Leftrightarrow 2y = x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

Como  $m_s = \frac{1}{2}$ , tem-se que,  $m_p = -2$ , logo,  $p$ :  $y = -2x + b$

Como  $P \in p$ ,

$$0 = -2 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 8$$

$$p: y = -2x + 8$$

- Coordenadas do ponto  $I$  de interseção das retas  $p$  e  $s$  que é o ponto de  $s$  mais próximo de  $P$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 8 = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 16 = x - 2 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x = -18 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = -2 \times \frac{18}{5} + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

- Determinação da distância entre os pontos  $P$  e  $I$

$$\overline{PI} = \sqrt{\left(\frac{18}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$P(4, 0)$

$I\left(\frac{18}{5}, \frac{4}{5}\right)$

A distância de  $P$  a  $s$  é igual a  $\overline{PI} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{6.1. } f(x) &= \sin(\pi - x) + \sin(2\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) = \\
 &= \sin(x) + \sin(-x) + \sin(x) - \cos(x) - \cos(x) = \\
 &= \sin(x) - \sin(x) + \sin(x) - \cos(x) - \cos(x) = \\
 &= \sin(x) - 2\cos(x)
 \end{aligned}$$

**6.2.** Como  $\beta \in ]-\pi, 0[$  e  $\tan(\beta) > 0$ , então  $\beta$  pertence ao 3.º quadrante.  
Quer-se calcular  $f(\beta) = \sin(\beta) - 2\cos(\beta)$ .

Da fórmula:

$$1 + \tan^2(\beta) = \frac{1}{\cos^2(\beta)},$$

vem que:

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2(\beta)} \Leftrightarrow \cos^2(\beta) = \frac{16}{25}$$

$$\text{Como } \beta \in 3.^\circ \text{ Q.}, \cos(\beta) < 0, \text{ logo, } \cos(\beta) = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Assim, como  $\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$ , tem-se que:

$$\sin(\beta) = \tan(\beta) \times \cos(\beta) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Logo, } f(\beta) = \sin(\beta) - 2\cos(\beta) = -\frac{3}{5} - 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 1.$$

**7. Por exemplo:**

$$y = \sin(x)$$

↓ **III.** Translação horizontal associada ao vetor (2, 0)

$$y = \sin(x - 2)$$

↓ **II.** Contração horizontal de coeficiente  $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$y = \sin(2(x - 2))$$

↓ **I.** Dilatação vertical de coeficiente 2

$$y = 2\sin(2(x - 2))$$

↓ **IV.** Translação vertical associada ao vetor (0, 2)

$$f(x) = 2 + 2\sin(2(x - 2))$$

**III – II – I – IV**

**Opção (B)**

8.

I.  $P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$

II. Com  $r = 2$  e  $x_Q = 2 \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , tem-se que  $\cos \beta = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{aligned} \text{III. } \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{r^2} &= \frac{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) \cdot (r \cos \beta, r \sin \beta)}{r^2} = \\ &= \frac{r^2 \cos \alpha \cos \beta + r^2 \sin \alpha \sin \beta}{r^2} = \\ &= \frac{r^2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{r^2} = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OP} = P - O = P = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = Q = (r \cos \beta, r \sin \beta)$$

I – b) ; II – c) ; III – a)

$$9.1. f(x) = b \cos(c(x - d))$$

Zeros de  $f$ :  $x = \pi + 4k, k \in \mathbb{Z}$ .

A diferença entre dois zeros consecutivos, para  $k$  e  $k + 1$ , é 4, porque

$$\pi + 4(k + 1) - (\pi + 4k) = \pi + 4k + 4 - \pi - 4k = 4.$$

Assim, para a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = b \cos(c(x - d)),$$

designando por  $P_0$  o seu período fundamental, sabe-se que a distância entre dois zeros consecutivos é  $\frac{P_0}{2}$ .

$$\text{Logo, } \frac{P_0}{2} = 4 \Leftrightarrow P_0 = 2 \times 4 \Leftrightarrow P_0 = 8.$$

Opção (D)

$$9.2. f(x) = 1 - \cos(x)$$

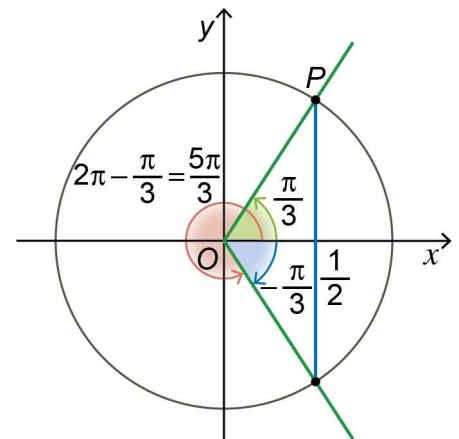
Quer-se resolver a equação  $f(x) = \frac{1}{2}$ , em  $[0, 2\pi[$

$$1 - \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Recorrendo à circunferência trigonométrica, verifica-se que,

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ , em  $[0, 2\pi[$  tem as soluções:

$$x = \frac{\pi}{3} \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$



10. A função definida por  $y = \tan(x)$  não está definida nos valores de  $x$  da forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim,  $m$  é tal que:  $m\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ou seja,

$$mx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$mx = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6m} + \frac{k\pi}{m}, k \in \mathbb{Z}$$

Daqui conclui-se que a distância entre dois valores consecutivos de  $x$  que não pertencem ao domínio é  $\frac{\pi}{m}$ .

Como o enunciado indica que essa distância é  $\frac{\pi}{2}$ , que é a diferença entre dois valores consecutivos que não pertencem ao domínio, obtém-se

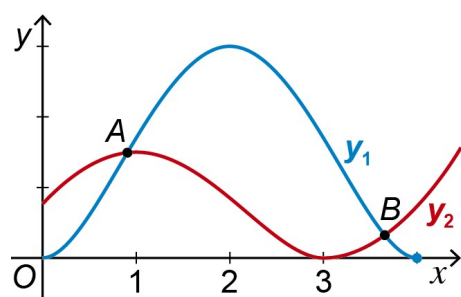
$$\frac{\pi}{m} = \frac{\pi}{2},$$

pelo que  $m = 2$ .

Opção (C)

11. Quer-se resolver a equação:

$$\underbrace{h(t-1)}_{y_1} = \underbrace{0,5h(t)}_{y_2}, \text{ em } [0, 4].$$



$$A(1; 15) \text{ e } B(3,590; 3)$$

$$t_1 = 01 \text{ min } 00 \text{ s}$$

$$t_2 \approx 3,590 = 03 \text{ min } 35 \text{ s}$$

$$0,590 \text{ min} = 0,590 \times 60 \text{ s} \approx 35 \text{ s}$$

Nos instantes  $t_1 = 01 \text{ min } 00 \text{ s}$  e  $t_2 \approx 03 \text{ min } 35 \text{ s}$ , o ponto da cadeira estava nas condições do enunciado, ou seja, um minuto antes, estava a metade da sua altura.