

1.1. Opção (B)

1.2. Sabe-se que $p = 2\overline{PB} + \overline{CP}$.

$$\overline{PB}^2 = (1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = 1 + 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \Rightarrow \overline{PB} = \sqrt{2 + 2\cos \alpha}$$

$$\overline{CP} = 2\sin \alpha$$

$$\text{Logo, } p(\alpha) = 2\overline{PB} + \overline{CP} = 2\sqrt{2 + 2\cos \alpha} + 2\sin \alpha$$

$$\therefore p(\alpha) = 2(\sin \alpha + \sqrt{2 + 2\cos \alpha})$$

1.3.

a) Seguindo a sugestão:

$\overline{OP} = \overline{OA}$. Então, $\widehat{OPA} = \widehat{PAO} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. A inclinação da reta AP é dada por:

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Equação reduzida da reta } AP: y = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)x + b$$

O ponto A de coordenadas $(1, 0)$ pertence à reta AP . Então: $0 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + b$

$$\text{Daqui resulta que: } b = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Assim, as coordenadas do ponto Q , em função de α , são $\left(0, \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$.

b) A ordenada de Q é dada por: $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)} \approx 1,38$

2.1. Sabe-se que:

$$-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq -3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -3$$

Ou seja:

$$-3 \leq -3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a - 3 \leq a - 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq a + 3$$

Sendo $D_f = [-5, 1]$ então: $a - 3 = -5 \Leftrightarrow a = -2$

2.2. Opção (C)

$$\text{Se } a = 0, f(x) = -3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$D_f' = [-3, 3]$$

Mínimo -3 ; máximo 3

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -3 \cos\left(\frac{2\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) = -3 \cos 0 = -3$$

Conclui-se que $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ é mínimo da função (e não máximo).

2.3. Seja $p \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x)$

Então:

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= a - 3 \cos\left(2(x+\pi) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= a - 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) \\ &= a - 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x) \end{aligned}$$

Conclui-se que π é período da função.

2.4. Opção (D)

$$3.1. \quad \overline{BE} \cdot \overline{EF} = \|\overline{BE}\| \times \|\overline{EF}\| \times \cos(\widehat{BE, EF}) = 12 \times 6 \times \cos 120^\circ = -36$$

$$3.2. \quad \overline{GA} \cdot \overline{GB} = \|\overline{GA}\| \times \|\overline{GB}\| \times \cos(\widehat{GA, GB}) = 6 \times 6 \times \cos 60^\circ = 18$$

A área do hexágono regular $[ABCDEF]$ é:

$$6 \times \frac{b \times h}{2} = 3 \times 6h = 18h$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{6} \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$$

Assim, a área do hexágono é:

$$18 \times 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3} \times \overline{GA} \cdot \overline{GB} = 3\sqrt{3} \times \frac{6 \times 6}{2} = 54\sqrt{3}$$

4.1. As coordenadas do ponto A são $(0,4,0)$.

Substituindo x , y , z pelas coordenadas do ponto A obtém-se:

$$(0,4,0) = \left(1, 3, -\frac{3}{4}\right) + k \times \left(2, -2, -\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + 2k \\ 4 = 3 - 2k \\ 0 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

4.2. Seja $ax + b + cz + d = 0$ uma equação cartesiana do plano ABC .

Sendo $r \perp ABC$, então as coordenadas de um vetor normal ao plano poderão ser $\left(2, -2, -\frac{3}{2}\right)$.

Assim, $2x - 2y - \frac{3}{2}z + d = 0$.

O ponto A pertence ao plano ABC , logo:

$$2 \times 0 - 2 \times 4 - \frac{3}{2} \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 8$$

Assim, o plano ABC é definido por:

$$2x - 2y - \frac{3}{2}z + 8 = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y + 3z - 16 = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y + 3z = 16$$

4.3. O volume da pirâmide $[OABC]$ é dado pela fórmula:

$$V = \frac{A_{\text{base}} \times h}{3} = \frac{8 \times z_C}{3}, \text{ sabendo que } A_{\text{base}} = \frac{\overline{OB} \times \overline{OA}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8.$$

As coordenadas do ponto C são da forma $(0,0,z)$ e C pertence ao plano ABC , logo:

$$-4 \times 0 + 4 \times 0 + 3z = 16 \Leftrightarrow z = \frac{16}{3}$$

$$V_{[OABC]} = \frac{8 \times \frac{16}{3}}{3} = \frac{128}{9}$$