

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta - \sin \beta &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \sin \alpha + \cos \alpha = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} + \left(-\frac{2}{3} \right) = \\ &= -\frac{2+\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} \\ \alpha &\in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[, \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. O argumento da função cosseno toma valores de um intervalo com amplitude superior a 2π .

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \left(3x - \frac{\pi}{7} \right) \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{7} \right) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{-b}_{b \in \mathbb{R}^+} \leq -b \cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{7} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2 - b \leq a^2 + 2 - b \cos^2 \left(3x - \frac{\pi}{7} \right) \leq a^2 + 2 \end{aligned}$$

Uma vez que o contradomínio de f é o intervalo $[-a, 3a]$, então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 + 2 - b = -a \\ a^2 + 2 = 3a \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + 2 = b \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + 2 = b \\ a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + 2 = b \\ a = \frac{3 \pm 1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a + 2 = b \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2 + a + 2 = b \\ a = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 8 \\ a = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, para $a = 1$, $b = 4$ e para $a = 2$, $b = 8$.

Como $b - a < 4$, então os valores de a e de b são, respetivamente, 1 e 4.

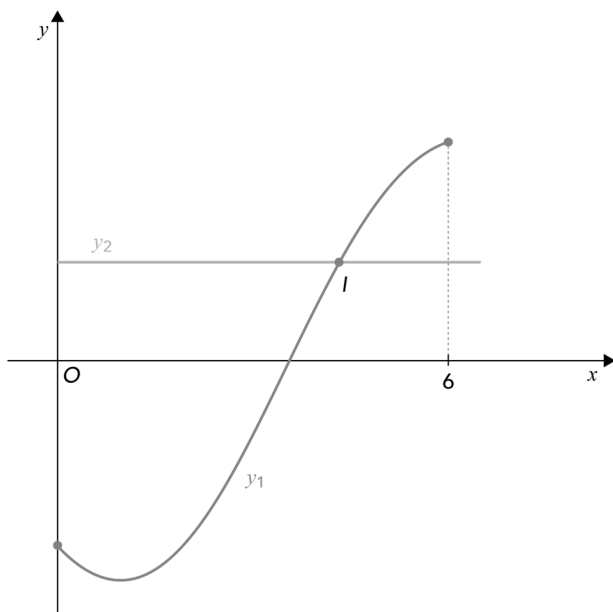
3. $T(x + 2) = T(x) - 1,5 \Leftrightarrow T(x) - T(x + 2) = 1,5$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 20 - 3 \cos(0,6x + 0,4) - 20 + 3 \cos(0,6(x + 2) + 0,4) = 1,5 \\ &\Leftrightarrow -3 \cos(0,6x + 0,4) + 3 \cos(0,6(x + 2) + 0,4) = 1,5 \end{aligned}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1 = -3 \cos(0,6x + 0,4) + 3 \cos(0,6(x + 2) + 0,4), 0 \leq x \leq 6$$

$$y_2 = 1,5$$



A abcissa do ponto I , arredondada às centésimas, é 4,33.

$$0,33 \times 60 \approx 20$$

A hora desse dia, após as 8 horas, em que tal aconteceu foi às 12 horas e 20 minutos.

$$\begin{aligned}
 4. \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v} \right) &= \vec{u} \cdot \frac{\vec{u}}{2} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{\vec{u}}{2} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\
 &= \frac{\|\vec{u}\|^2}{2} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{2} + \|\vec{v}\|^2 = \\
 &= \frac{(2\sqrt{3})^2}{2} - \frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2} - 4^2 = \\
 &= 6 - \frac{2\sqrt{3} \times 4 \times \left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} - 16 = \\
 &= -10 - 4 \times \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\
 &= -10 - 4 \times \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\
 &= -10 + 6 = \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

5.

5.1 O ponto A pertence à circunferência $\mathcal{C}$, tem abscissa positiva e ordenada nula, pelo que as suas coordenadas são do tipo $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Substituindo-as em $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$, tem-se:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (0 + 1)^2 &= 10 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow x - 1 &= -3 \vee x - 1 = 3 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \vee x = 4\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^+$, logo A tem coordenadas $(4, 0)$.

$[AB]$ é um diâmetro da circunferência $\mathcal{C}$, pelo que, para determinarmos as coordenadas do ponto B , faremos $B = C + \overrightarrow{AC}$.

C tem coordenadas $(1, -1)$ e o vetor $\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $C - A = (1, -1) - (4, 0) = (-3, -1)$.

Assim, $B = (1, -1) + (-3, -1) = (-2, -2)$.

A reta tangente à circunferência no ponto B é perpendicular ao raio neste ponto, pelo que um seu vetor diretor será, por exemplo, $(1, -3)$.

Assim, uma equação vetorial da reta tangente à circunferência no ponto B é:

$$(x, y) = (-2, -2) + k(1, -3), k \in \mathbb{R}$$

5.2 Opção (A)

A reta t é paralela à reta r , pelo que têm o mesmo declive.

α é a inclinação da reta t e $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

Como $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ[$, então $\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

Assim, a equação reduzida da reta t é $y = -2\sqrt{2}x$.

5.3 O declive da reta s é igual a $\frac{-1}{-1} = 1$, portanto, a equação reduzida da reta s é da forma:

$$y = x + b$$

O ponto de coordenadas $(-5, 2)$ pertence à reta, pelo que:

$$2 = -5 + b \Leftrightarrow b = 7$$

Assim, a equação reduzida da reta s é $y = x + 7$.

O declive de uma reta perpendicular à reta s é igual a -1 .

Determinemos a equação reduzida da reta perpendicular à reta s que passa pelo ponto D :

$$y = -x + b$$

O ponto de coordenadas $(-4, -3)$ pertence à reta, pelo que:

$$-3 = -(-4) + b \Leftrightarrow b = -7$$

A equação reduzida da reta pretendida é $y = -x - 7$.

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto I , ponto de interseção das duas retas:

$$x + 7 = -x - 7 \Leftrightarrow 2x = -14 \Leftrightarrow x = -7$$

Assim, $y = -7 + 7 = 0$.

I tem coordenadas $(-7, 0)$.

A distância do ponto de D à reta s corresponde à distância entre os pontos D e I , logo:

$$\begin{aligned} d_{(D,I)} &= \sqrt{(-7 - (-4))^2 + (0 - 3)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 9} = \\ &= \sqrt{18} = \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

6. Opção (C)

$$x - y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = x - 6$$

$$R(x, x - 6)$$

$$\overrightarrow{RA} = A - R = (4, -3) - (x, x - 6) = (4 - x, -x + 3)$$

$$\overrightarrow{RB} = B - R = (-1, 2) - (x, x - 6) = (-1 - x, -x + 8)$$

$$\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = 0 \Leftrightarrow (4 - x, -x + 3) \cdot (-1 - x, -x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - x)(-1 - x) + (-x + 3)(-x + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 - 4x + x + x^2 + x^2 - 8x - 3x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 5$$

Como a abcissa do ponto R é inferior à abcissa do ponto A , então $x = 2$:

$$R(2, 2 - 6) = (2, -4)$$

$$\overrightarrow{RA} = (4 - 2, -3 + 4) = (2, 1) \qquad \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{RB} = (-1 - 2, 2 + 4) = (-3, 6) \qquad \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{45}}{2} = \frac{15}{2} \text{ u.a.}$$

7. De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir que o ponto A tem coordenadas $(6, 0)$ e que o ponto B tem coordenadas $(6, 10)$.

Seja $y, y \in \mathbb{R}^+$, a ordenada do ponto D .

D tem coordenadas $(0, y)$.

Assim:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} &= B - D = (6, 10) - (0, y) = \\ &= (6, 10 - y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= A - D = (6, 0) - (0, y) = \\ &= (6, -y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} &= 20 \Leftrightarrow (6, 10 - y) \cdot (6, -y) = 20 \\ &\Leftrightarrow 36 - 10y + y^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 6}{2} \\ &\Leftrightarrow y = 2 \vee y = 8\end{aligned}$$

Como $\overline{OD} > \overline{DC}$, $y = 8$.

D tem coordenadas $(0, 8)$.

Assim, a equação reduzida da circunferência tangente ao eixo Ox e de centro no ponto D é:

$$x^2 + (y - 8)^2 = 64$$

8. Opção (B)

Sejam $(6, -4, 5)$ as coordenadas de um vetor normal ao plano α .

Uma vez que reta AB é paralela ao plano α , tem-se que $\overrightarrow{AB} \cdot (6, -4, 5) = 0$.

Assim:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (k + 1, 2k + 1, 7 - k) - (1, 0, 2) = \\ &= (k, 2k + 1, 5 - k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot (6, -4, 5) &= 0 \Leftrightarrow (k, 2k + 1, 5 - k) \cdot (6, -4, 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6k - 4(2k + 1) + 5(5 - k) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6k - 8k - 4 + 25 - 5k = 0 \\ &\Leftrightarrow -7k = -21\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-21}{-7}$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

9.

9.1 Opção (C)

Um vetor diretor da reta que passa no ponto B e é paralela à reta AE é obtido a partir de $k\left(1, \frac{3}{2}, 3\right), k \in \mathbb{R}$, pelo que apenas duas opções verificam esta condição.

Para $k = 2$, obtemos o vetor de coordenadas $(2, 3, 6)$.

Averiguemos, agora, em qual delas o ponto B , de coordenadas $(1, 2, -5)$, pertence à reta:

$$(1, 2, -5) = (-2, 0, -5) + k(2, 3, 6) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 + 2k \\ 2 = 3k \\ -5 = -5 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = 0 \end{cases}$$

Uma vez que os valores obtidos para k são diferentes, conclui-se que o ponto B não pertence a esta reta.

$$(1, 2, -5) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3 + 2k \\ 2 = 5 + 3k \\ -5 = 1 + 6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Uma vez que os valores obtidos para k são iguais, conclui-se que o ponto B pertence à reta definida por $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$, sendo esta equação a equação vetorial da reta que se pretende.

9.2 Começemos por escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta AE :

$$(x, y, z) = \left(6 + k, -1 + \frac{3}{2}k, 3 + 3k\right), k \in \mathbb{R}$$

I é o ponto da reta AE cuja abcissa é igual à sua ordenada, logo:

$$6 + k = -1 + \frac{3}{2}k \Leftrightarrow 12 + 2k = -2 + 3k \\ \Leftrightarrow k = 14$$

Desta forma, as coordenadas do ponto I são $\left(6 + 14, -1 + \frac{3}{2} \times 14, 3 + 3 \times 14\right) = (20, 20, 45)$.

Pretende-se uma equação do plano perpendicular à reta OI , pelo que o vetor $\overrightarrow{OI}$, de coordenadas $(20, 20, 45)$, é um vetor normal a este plano cuja equação será da forma $20x + 20y + 45z + d = 0$.

O ponto B pertence a este plano, logo:

$$20 \times 1 + 20 \times 2 + 45 \times (-5) + d = 0 \Leftrightarrow d = 165$$

Assim, uma equação do plano perpendicular à reta OI e que passa no ponto B é:

$$20x + 20y + 45z + 165 = 0$$

o que é equivalente a $4x + 4y + 9z + 33 = 0$.

9.3 Para determinar as coordenadas do ponto A , comecemos por determinar a equação cartesiana do plano ABC :

$$2(x - 1) + 3(y - 2) + 6(z + 5) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z - 2 - 6 + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + 6z + 22 = 0$$

Consideremos um ponto genérico da reta AE :

$$(x, y, z) = \left(6 + k, -1 + \frac{3}{2}k, 3 + 3k\right), k \in \mathbb{R}$$

Determinemos as coordenadas do ponto A , ponto de interseção da reta AE com o plano ABC :

$$2(6 + k) + 3\left(-1 + \frac{3}{2}k\right) + 6(3 + 3k) + 22 = 0 \Leftrightarrow 12 + 2k - 3 + \frac{9}{2}k + 18 + 18k + 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2k + \frac{9}{2}k + 18k = -12 + 3 - 18 - 22$$

$$\Leftrightarrow \frac{49}{2}k = -49$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Assim, tem-se que o ponto A tem coordenadas $\left(6 - 2, -1 + \frac{3}{2} \times (-2), 3 + 3 \times (-2)\right) = (4, -4, -3)$.

$$\overrightarrow{OA} = (4, -4, -3)$$

$$\overrightarrow{OB} = (1, 2, -5)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (4, -4, -3) \cdot (1, 2, -5) = 4 - 8 + 15 = 11$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{41}$$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$$

$$\cos(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \frac{11}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}}$$

$$(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}}\right) \approx 72^\circ$$

A amplitude do ângulo AOB , arredondada às unidades, é 72° .