Máximo
Matemática A 12

Proposta de prova-modelo

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

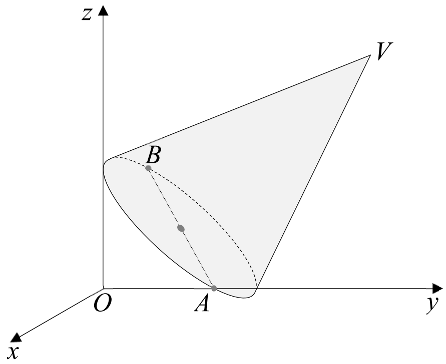
  1.1. , **1.2.** , **1.3.** e **4**

  Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.
- Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Porto Editora

- Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um **cone reto** de vértice V.



Sabe-se que:

- A base do cone é o círculo de diâmetro $[AB]$ contido no plano α definido pela equação $x-2y-2z+6=0$;
- O ponto A pertence ao eixo Oy e o ponto B tem coordenadas $(-4, -1, 2)$;
- A altura do cone é 6 e o vértice V tem cota positiva.

1.1. Mostre que o ponto A tem coordenadas $(0, 3, 0)$.

1.2. Determine uma equação vetorial da reta que passa no ponto V e é perpendicular ao plano da base do cone. De seguida, mostre que o ponto V tem coordenadas $(-4, 5, 5)$.

1.3. Seja P o ponto de coordenadas $(-4, 2, -1)$. Mostre que o ponto P pertence à base do cone.

2. A magnitude aparente de uma estrela (ou de outro astro), M, está relacionada com a intensidade do seu brilho, B, medida a partir da Terra, em unidades de energia por unidade de área, por:

$$M = -2,5\log_{10}\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

sendo B_0 a intensidade do brilho tomado por padrão (normalmente é o brilho da estrela Vega).

2.1. Mostre que $B = 10^{-0,4M} \times B_0$.

2.2. Sabe-se que a magnitude aparente do Sol é $-26,74$ e a magnitude aparente média da Lua, em fase de lua cheia, é $-12,74$.

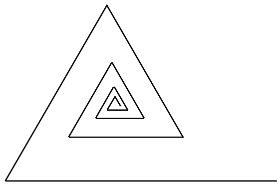
Mostre que a intensidade do brilho do Sol, medida a partir da Terra, é cerca de 400 mil vezes (398 107) maior que a da Lua em fase de lua cheia

3. Para determinados números reais a, b e c, sabe-se que $\log_a b = \frac{1}{4}$ e $\log_b c = 2$.

Qual é o valor de $\log_b(ac)$?

(A) $\frac{9}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{9}{2}$ **(D)** 6

4. A linha parcialmente representada na figura é formada por uma sucessão de segmentos de reta, sendo a medida de cada um, a partir do segundo, igual a três quartos da medida do segmento de reta anterior.
Sabendo que a medida do primeiro segmento é igual a 4 cm, o limite, quando n tende para $+\infty$, da medida do comprimento da linha constituída por n segmentos de reta assim obtidos é igual a:



(A) 12 cm **(B)** 16 cm **(C)** 20 cm **(D)** 24 cm

5. Quatro rapazes e três raparigas vão ao cinema e ocupam lugares seguidos numa fila.

De quantas maneiras podem ocupar os sete lugares de forma que **não** fiquem raparigas em lugares seguidos?

(A) 144 **(B)** 240 **(C)** 432 **(D)** 1440

6. No decurso de uma epidemia provocada por um vírus, sabe-se que, num determinado dia, a quarta parte dos membros de uma comunidade encontrava-se infetada.

6.1. Nesse dia, foi escolhido, ao acaso, um membro dessa comunidade para ser testado quanto à presença desse vírus no organismo.

Acerca do teste aplicado, sabe-se que:

- Só há dois resultados possíveis: positivo ou negativo;
- Se a pessoa estiver infetada, a probabilidade de o teste dar negativo (falso negativo) é 1%;
- Se a pessoa não estiver infetada, a probabilidade de o teste dar positivo (falso positivo) é 4%;

Sabendo que o teste deu positivo, qual é a probabilidade de a pessoa testada não estar infetada?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

6.2. No mesmo dia, foi formada uma comissão de quatro elementos escolhidos ao acaso entre os membros dessa comunidade que se sabe ser formada por 28 indivíduos.
Determine a probabilidade de a comissão assim formada ter pelo menos um indivíduo infetado.
Apresente o resultado na forma dízima, arredondado às milésimas.

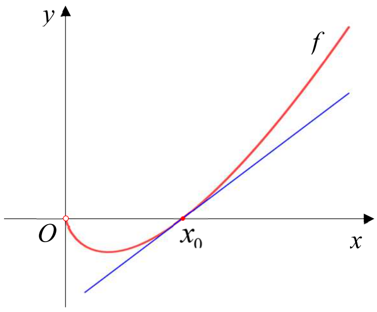
7. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-\sin(3x)}{x} & \text{se } x<0 \\ x-1+x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função f é contínua em $x=0$.

7.2. Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntota quando x tende para $+\infty$.

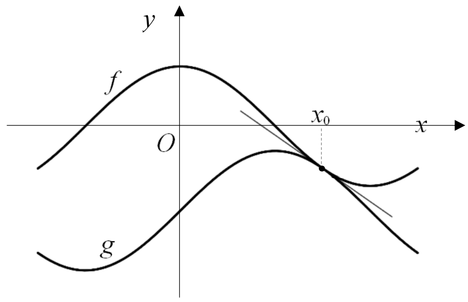
8. Para um certo valor de $a \in \mathbb{R}$, considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = ax + x\ln x$.



Seja x_0 o único zero da função f.

Mostre que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 não depende do valor de a.

9. Na figura, estão parcialmente representados os gráficos das funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos(x - a) + k$, com $a, k \in \mathbb{R}$.



Sabendo que os dois gráficos têm uma reta tangente comum no ponto de abcissa x_0, pode afirmar-se que:

(A) $\cos x_0 = \cos(x_0 - a)$

(B) $\cos x_0 = \sin(x_0 - a)$

(C) $\sin x_0 = \sin(x_0 - a)$

(D) $\sin x_0 = -\sin(x_0 - a)$

10. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}}$.

10.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

10.2. Existe um número real a para o qual a taxa média de variação de f entre a e $a+2$ é igual a -1.

Determine o valor de a recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

Na sua resposta:

- apresente a(s) equação(ões) que lhe permite(m) obter a solução do problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permitem resolver a(s) equação(ões);
- apresente o valor de a arredondado às centésimas.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja z_0 uma solução não nula da equação $z^2=\mathrm{i}\,\overline{z}$.

Qual dos seguintes valores pode ser um argumento de z_0?

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ **(B)** $\dfrac{\pi}{6}$ **(C)** $\dfrac{\pi}{4}$ **(D)** $\dfrac{\pi}{3}$

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=2-2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

Determine o menor número natural n para o qual $(\mathrm{i}\times z_1)^n$ é um número real negativo.

Fim da prova

COTAÇÕES

	As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.				
Questões	1.1.	1.2.	1.3.	4.	Subtotal
Cotação (pontos)	16	20	20	16	72

	Destes 14 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação														
Questões	2.1.	2.2.	3.	5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	8.	9.	10.1	10.2	11.	12.	Subtotal
Cotação (pontos)	8 × 16 pontos														128

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \,, \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \,, \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \,, \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \,, \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

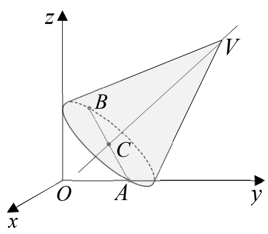
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Proposta de resolução

1. **1.1.** $\alpha:\ x-2y-2z+6=0$

$A(0,\ a\ ,0)\in\alpha \Leftrightarrow 0-2a-0+6=0 \Leftrightarrow 2a=6 \Leftrightarrow a=3$



Temos, portanto, $A(0,\ 3\ ,0)$.

1.2. Seja C o centro da base do cone.

C é o ponto médio de $[AB]$, com $A(0,\ 3\ ,0)$ e $B(-4,\ -1,\ 2)$.

$$C\left(\frac{-4+0}{2},\frac{-1+3}{2},\frac{2+0}{2}\right)=C(-2,\ 1,\ 1)$$

A reta que passa no ponto V e é perpendicular ao plano da base do cone é a reta r que tem a direção do vetor $(1,\ -2,\ -2)$ e que passa no ponto $C(-2,\ 1,\ 1)$.

$r:(x,\ y,\ z)=(-2,\ 1,\ 1)+k(1,\ -2,-2),\ k\in\mathbb{R}$

O ponto V é o ponto da reta r, de cota positiva, tal que $\overline{VC}=6$

Ponto genérico da reta r: $R(-2+k,\ 1-2k,\ 1-2k),\ k\in\mathbb{R}$

$$\overline{CR}=6 \Leftrightarrow \sqrt{(-2+k+2)^2+(1-2k-1)^2+(1-2k-1)^2}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2+4k^2+4k^2}=6 \Leftrightarrow \sqrt{9k^2}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|k|=6 \Leftrightarrow |k|=2 \Leftrightarrow k=-2 \vee k=2$$

Se $k=2$, $R(-2+2,\ 1-4,\ 1-4)=R(0,\ -3,\ -3)$

Se $k=-2$, $R(-2-2,\ 1+4,\ 1+4)=R(-4,\ 5,\ 5)$

Portanto, como V tem cota positiva, $V(-4,\ 5,\ 5)$.

1.3. $A(0,\ 3\ ,0)$, $C(-2,\ 1,\ 1)$, $P(-4,\ 2,\ -1)$

Raio da base $=r=\overline{AC}=\sqrt{(-2-0)^2+(1-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$

O ponto P pertence à base do cone se e só se $P\in\alpha$ e $\overline{PC}\leq 3$.

$P\in\alpha \Leftrightarrow -4-2\times 2-2\times(-1)+6=0 \Leftrightarrow -4-4+2+6=0 \Leftrightarrow 0=0$ (Verdadeiro)

$\overline{PC}\leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(-4+2)^2+(2-1)^2+(-1-1)^2}\leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{4+1+4}\leq 3 \Leftrightarrow 3\leq 3$ (Verdadeiro)

Portanto, o ponto P pertence à base do cone.

2. $M = -2,5\log_{10}\left(\dfrac{B}{B_0}\right)$

2.1. $M = -2,5\log_{10}\left(\dfrac{B}{B_0}\right) \Leftrightarrow \dfrac{M}{-2,5} = \log_{10}\left(\dfrac{B}{B_0}\right) \Leftrightarrow -0,4M = \log_{10}\left(\dfrac{B}{B_0}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{B_0} = 10^{-0,4M} \Leftrightarrow B = 10^{-0,4M} \times B_0$$

2.2. $M_{\text{Sol}} = -26,74$

$M_{\text{Lua}} = -12,74$

$B_{\text{Sol}} = 10^{-0,4M_{\text{Sol}}} \times B_0 = 10^{-0,4\times(-26,74)} \times B_0 = 10^{10,696} \times B_0$

$B_{\text{Lua}} = 10^{-0,4M_{\text{Lua}}} \times B_0 = 10^{-0,4\times(-12,74)} \times B_0 = 10^{5,096} \times B_0$

$\dfrac{B_{\text{Sol}}}{B_{\text{Lua}}} = \dfrac{10^{10,696} \times B_0}{10^{5,096} \times B_0} = 10^{10,696-5,096} = 10^{5,6} \approx 398\,107$

$B_{\text{Sol}} \approx 398\,107 \times B_{\text{Lua}}$

Portanto, a intensidade do brilho do Sol, medida a partir da Terra, é cerca de 400 mil vezes ($398\,107$) maior do que a da Lua, em fase de lua cheia.

3. $\log_a b = \dfrac{1}{4}$

$\log_b c = 2$

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c = \frac{\log_a a}{\log_a b} + 2 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 2 = 4 + 2 = 6$$

Resposta: (D)

4. As medidas dos segmentos de reta estão em progressão geométrica , (a_n), de razão $r = \dfrac{3}{4}$,

sendo $a_1 = 4$.

$$\lim S_n = \lim\left(a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(4 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right) = 4 \times \frac{1-\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = 4\times 4\times(1-0) = 16$$

Resposta: (B)

5. $4! \times {}^5A_3 = 1440$

${}^5A_3$: Número de maneiras de escolher ordenadamente lugar para as 3 raparigas entre os 5 lugares determinados pelos 4 rapazes: $\boxed{1}$ Rapaz $\boxed{2}$ Rapaz $\boxed{3}$ Rapaz $\boxed{4}$ Rapaz $\boxed{5}$

$4!$: Número de maneiras de ordenar os 4 rapazes

Resposta: (D)

6. **6.1.** Sejam os acontecimentos:

I : "A pessoa escolhida está infetada"

A : "O teste deu positivo"

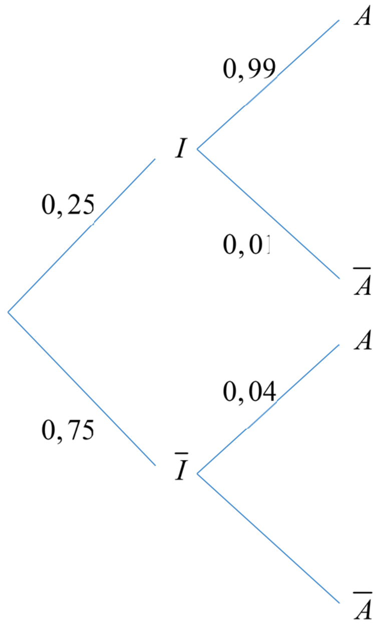
É dado que:

$P(I)=\frac{1}{4}=0,25$

$P(\overline{A}\mid I)=0,01$

$P(A\mid \overline{I})=0,04$

Probabilidade pedida: $P(\overline{I}\mid A)$



No diagrama ao lado, registaram-se os valores dados, bem como aqueles que foram sendo sucessivamente determinados:

$P(\overline{I})=1-0,25=0,75$

$P(A\mid I)=1-0,01=0,99$

$$P(\overline{I}\mid A)=\frac{P(\overline{I}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\overline{I})\times P(A\mid \overline{I})}{P(\overline{I}\cap A)+P(I\cap A)}=$$

$$=\frac{0,75\times 0,04}{0,75\times 0,04+0,25\times 0,99}=\frac{0,03}{0,2775}\approx 0,1081\approx 10,8\%$$

6.2. Número de indivíduos: 28

Número de infetados: 7

Número de não infetados: 21

Número de casos possíveis: ${}^{28}C_4=20\ 475$

Número de casos favoráveis: ${}^{28}C_4-{}^{21}C_4=20\ 475-5985=14\ 490$

${}^{21}C_4$ → Número de comissões sem infetados que é possível formar

${}^{28}C_4$ → Número total de comissões que é possível formar

Probabilidade pedida: $P=\frac{14\ 490}{20\ 475}=\frac{46}{65}\approx 0,708$

7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sin(3x)}{x} & \text{se } x<0\\ x-1+x\,\mathrm{e}^{-x} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

7.1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-\sin(3x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2x}{x}-\dfrac{\sin(3x)}{x}\right) = 2-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(3x)}{x} =$

$= 2-3\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(3x)}{3x} = 2-3\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\sin y}{y} = 2-3\times 1 = -1$ | $y=3x$; Se $x\to 0^-$, $y\to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-1+x\,\mathrm{e}^{-x}\right) = 0-1+0\times \mathrm{e}^0 = -1 = f(0)$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Logo, a função f é contínua em $x=0$.

7.2. Seja $y=mx+b$ a assíntota do gráfico da função f quando x tende para $+\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1+x\,\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-x}\right) = 1-0+0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+x\,\mathrm{e}^{-x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+x\,\mathrm{e}^{-x}\right) = -1+\lim_{x\to+\infty}\left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right) \overset{(\infty\times 0)}{=}$$

$$= -1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) = -1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}\right) = -1+\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}}\right) = -1+\frac{1}{+\infty} = -1+0 = -1$$

A reta de equação $y=x-1$ é uma assíntota ao gráfico da função f quando x tende para $+\infty$.

8. $f(x) = ax + x\ln x$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + x\ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(a+\ln x) = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} a+\ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = -a \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-a}$

O único zero da função f é $x_0 = \mathrm{e}^{-a}$.

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é igual a $f'(x_0)$.

$f'(x) = (ax + x\ln x)' = (ax)' + (x\ln x)' =$

$= a + x'\ln x + x(\ln x)' = a + \ln x + x\times\dfrac{1}{x} =$

$= a + \ln x + 1$

$f'(x_0) = f'(\mathrm{e}^{-a}) = a + \ln \mathrm{e}^{-a} + 1 = a - a + 1 = 1$

Portanto, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é igual a 1, logo não depende do valor de a.

9. $f(x)=\cos x$; $\quad g(x)=\cos(x-a)+k$

$f'(x)=-\sin x$ e $g'(x)=-\sin(x-a)$

Se os gráficos das funções f e g têm uma reta tangente comum no ponto de abcissa x_0, então:

$f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow -\sin x_0=-\sin(x_0-a)\Leftrightarrow \sin x_0=\sin(x_0-a)$

Resposta: (C)

10. $f(x)=\dfrac{1-e^x}{e^{2x}}$

10.1. $$f'(x)=\left(\frac{1-e^x}{e^{2x}}\right)'=\frac{(1-e^x)'\,e^{2x}-(1-e^x)(e^{2x})'}{(e^{2x})^2}=\frac{-e^x\times e^{2x}-(1-e^x)\times 2(e^{2x})}{(e^{2x})^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}(-e^x-2+2e^x)}{(e^{2x})^2}=\frac{e^x-2}{e^{2x}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{e^x-2}{e^{2x}}=0\Leftrightarrow e^x-2=0\wedge e^{2x}\neq 0\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$ Mín.	$\nearrow$

$$f(\ln 2)=\frac{1-e^{\ln 2}}{e^{2\ln 2}}=\frac{1-2}{e^{\ln 2^2}}=\frac{-1}{e^{\ln 4}}=-\frac{1}{4}$$

Podemos, assim, concluir que:

- f é estritamente decrescente em $]-\infty,\ln 2]$ e estritamente crescente em $[\ln 2,+\infty[$;
- f tem um mínimo relativo igual a $-\frac{1}{4}$ para $x=\ln 2$.

10.2. A taxa média de variação de f entre a e $a+2$ é dada por $\dfrac{f(a+2)-f(a)}{2}$.

O valor de a pedido é a solução da equação $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{2}=-1$.

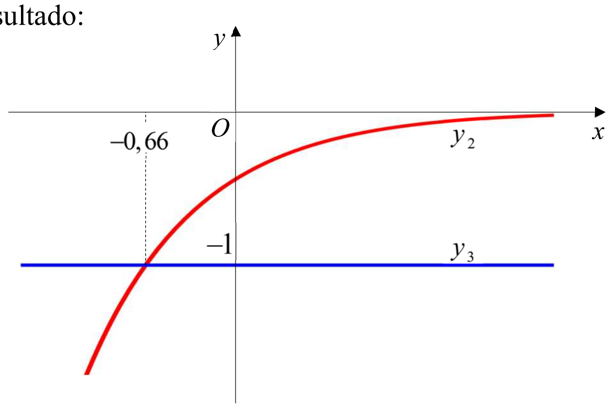
Recorrendo à calculadora gráfica, definiram-se:

$y_1=f(x)=\dfrac{1-e^x}{e^{2x}}$,

$y_2=\dfrac{y_1(x+2)-y_1(x)}{2}$ e $y_3=-1$

De seguida, determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de y_2 e y_3.

Obteve-se o seguinte resultado:



Portanto, $a \approx -0,66$.

11. Seja $z = \rho\, e^{i\theta}$

$$z^2 = i\,\overline{z} \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = i\,\overline{\rho e^{i\theta}} \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2\, e^{i(2\theta)} = \rho\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \rho = 0 \wedge 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho(\rho - 1) = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Temos, portanto $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$

Resposta: (B)

12. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4\times 3} = \sqrt{16} = 4$$

Seja θ um argumento de z_1

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} \\ \left(2, -2\sqrt{3}\right) \in 4.^{\text{o}}\ Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\theta = -\sqrt{3} \\ \left(2, -2\sqrt{3}\right) \in 4.^{\text{o}}\ Q \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \text{ é um argumento de } z_1$$

$$z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(i \times z_1\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \times 4e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \left(4e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}\right)^n = \left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n == 4^n\, e^{i\times n\times\frac{\pi}{6}} = 4^n\, e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

$\left(i \times z_1\right)^n$ é um número real negativo se e só se $\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = 6\pi + 12k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6 + 12k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o menor número natural para o qual $\left(i \times z_1\right)^n$ é um número real negativo é

$n = 6 + 12 \times 0 = 6$.