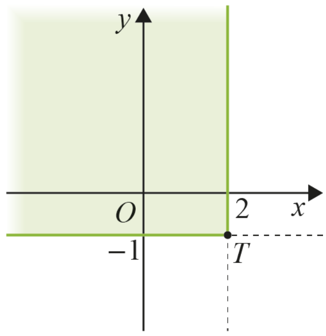
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, um conjunto A de pontos correspondente à região colorida.

O ponto T tem de coordenadas $(2,-1)$ e pertence ao conjunto A.



1.1. O simétrico de um ponto P em relação à reta definida pela equação $x=1$ pertence ao conjunto A (região colorida).

Qual das opções seguintes pode corresponder às coordenadas do ponto P?

(A) $\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$ **(B)** $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ **(C)** $\left(\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\right)$ **(D)** $\left(-\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$

1.2. Determina para que valores reais de k o ponto $S\left(3-2k, \frac{1}{2}-\frac{k+1}{3}\right)$ pertence ao conjunto A.

Apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais.

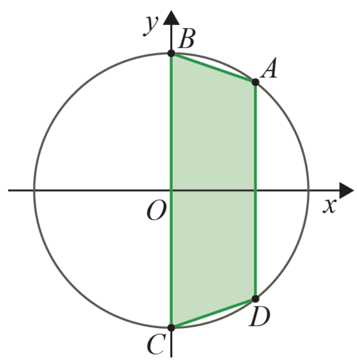
1.3. Representa através de uma equação, na forma reduzida, a circunferência de centro T e que passa em O.

1.4. A interseção da bissetriz dos quadrantes ímpares com o conjunto A é um dos lados de um quadrado.

Mostra que o perímetro desse quadrado é igual a $12\sqrt{2}$.

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, o trapézio $[ABCD]$ e uma circunferência. Sabe-se que:

- a circunferência é definida pela equação $x^2+y^2=12$;
- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência, sendo B e C os pontos de interseção da circunferência com o eixo Oy;
- o ponto A tem ordenada 3.

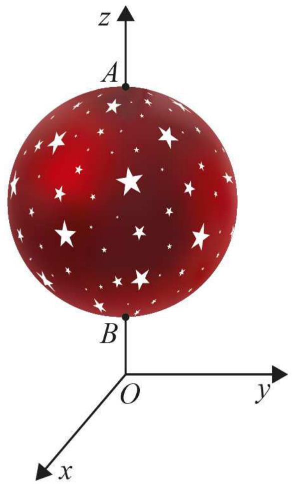


Mostra que o valor da medida da área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $6+3\sqrt{3}$.

3. As bolas de Natal

3.1. Na figura está representada, num referencial o.n. *Oxyz,* uma bola de Natal.

Sabe-se que:



. a superfície da bola é definida pela equação

$x^2 + y^2 + z^2 - 12z = -20$;

. os pontos A e B pertencem a Oz e são os extremos de um diâmetro da bola;

a) Determina as coordenadas do centro e o raio da superfície esférica.

b) Qual dos seguintes pontos pertence à superfície esférica?

(A) $\left(\sqrt{3}, 0, 4\right)$ **(B)** $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3\right)$

(C) $\left(-3, 3, \sqrt{12}\right)$ **(D)** $\left(4, -1, 6\right)$

c) Determina as coordenadas do ponto B.

d) Seja $[PQ]$ um diâmetro da bola, sendo $P\left(\sqrt{3}, -2, 9\right)$.

Representa por uma equação a reta paralela a Oy que passa pelo ponto Q.

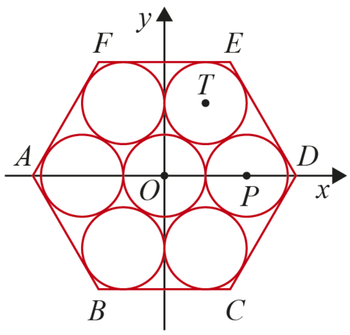
3.2. Na figura está representada uma caixa com a forma de um prisma hexagonal regular que contém sete bolas de Natal, ajustadas à caixa, sendo o raio de cada uma das bolas igual a 4.

No plano, num referencial o.n. *Oxy*, é representada a vista de cima da caixa com as bolas. Sabe-se que:

. Ox e Oy são eixos de simetria da figura;

. o raio de cada uma das circunferências é 4;

. os pontos O, P e T são centros de três das sete circunferências.



a) Representa por uma equação a circunferência de centro P.

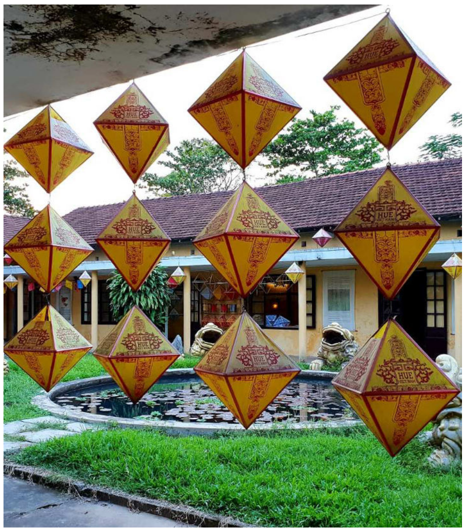
b) Determina as coordenadas do ponto T.

c) A reta EF é definida pela equação:

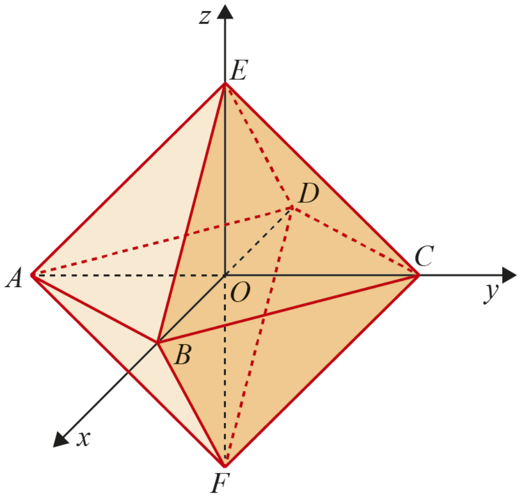
(A) $y = \sqrt{48}$ **(B)** $y = 12$

(C) $y = 4\left(1 + \sqrt{3}\right)$ **(D)** $y = 2 + \sqrt{48}$

4. Na figura está representada uma decoração feita com octaedros regulares e iguais.



A seguir está a representação de um desses octaedros, num referencial o.n. *Oxyz*:



Sabe-se que:

- o quadrilátero [*ABCD*] está contido no plano *xOy*;
- os vértices *E* e *F* pertencem a *Oz*;
- o vértice *E* tem coordenadas $(0,0,6)$.

Nota: Num octaedro regular, as faces são triângulos equiláteros.

4.1. Considera $M\left(k^2, 7, -2k+3\right), k \in \mathbb{R}$.

Determina para que valores de k o ponto M pertence ao plano mediador de [*BE*].

4.2. Determina a medida do volume do octaedro.

4.3. A interseção do plano $z=4$ com o octaedro é um quadrado.

Determina a medida da área desse quadrado.

FIM

Questões	Cotações															
	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	2.	3.1. a)	3.1. b)	3.1. c)	3.1. d)	3.2. a)	3.2. b)	3.2. c)	4.1.	4.2.	4.3.	Total
Pontos	10	15	13	15	15	10	13	13	15	13	15	10	13	15	15	**200**

1.

1.1. O simétrico do ponto $\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$ em relação à reta $x=1$ é o ponto de coordenadas $\left(1-(\pi-1),\ -\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $\left(2-\pi\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$, que pertence ao conjunto *A*.

Resposta: (A) $\left(\pi, -\frac{1}{2}\right)$

1.2. O ponto $S\left(3-2k\,,\ \frac{1}{2}-\frac{k+1}{3}\right)$ pertence ao conjunto *A* se e só se $3-2k\leq 2\wedge\frac{1}{2}-\frac{k+1}{3}\geq -1$.

$3-2k\leq 2\ \wedge\ \frac{1}{2}-\frac{k+1}{3}\geq -1\ \Leftrightarrow\ -2k\leq -1\ \wedge 3-2k-2\geq -6\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ k\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ -2k\geq -7\ \ \Leftrightarrow\ \ k\geq\frac{1}{2}\ \wedge\ k\leq\frac{7}{2}$

Resposta: $k\in\left[\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right]$

1.3. Centro da circunferência: $T(2,-1)$

Raio da circunferência: $\overline{OT}$

$\left(\overline{OT}\right)^2=1^2+2^2$. Daqui resulta que $\overline{OT}=\sqrt{5}$.

Equação da circunferência: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

Resposta: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$

1.4. A bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela equação $y=x$.

A reta $y=x$ interseta a reta $x=2$ no ponto *R* de coordenadas $(2,2)$.

A reta $y=x$ interseta a reta $y=-1$ no ponto *S* de coordenadas $(-1,-1)$.

O segmento de reta $[RS]$ é um dos lados do quadrado, sendo $\overline{RS}=\sqrt{(2+1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{2\times 3^2}=3\sqrt{2}$.

Seja *P* o perímetro do quadrado.

$P=4\times\overline{RS}=4\times 3\sqrt{2}=12\sqrt{2}$, como se pretendia provar.

2. Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = 12$

O raio da circunferência é $\sqrt{12}$, ou seja, $2\sqrt{3}$.

Assim, $B\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ e $C\left(0, -2\sqrt{3}\right)$.

O ponto A pertence à circunferência e tem ordenada 3.

$x^2 + 3^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Assim, $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$, pelo que $D\left(\sqrt{3}, -3\right)$.

Base maior do trapézio: $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$

Base menor do trapézio: $\overline{AD} = 6$

Altura do trapézio: $\sqrt{3}$

A medida da área do trapézio é dada por: $\frac{4\sqrt{3}+6}{2} \times \sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}+3\right) \times \sqrt{3} = 6 + 3\sqrt{3}$, como se queria demostrar.

3.1.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 12z = -20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36 = -20 + 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 16$

Centro: $(0,0,6)$

Raio: 4

Resposta: Centro $(0,0,6)$ e raio 4

b) As coordenadas do ponto $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3\right)$ são solução da equação

$x^2 + y^2 + z^2 - 12z = -20$, dado que $\sqrt{2}^2 + \sqrt{5}^2 + 3^2 - 12 \times 3 = 2 + 5 + 9 - 36 = -20$.

Resposta: (B) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3\right)$

c) $B(0,0,z)$ tal que $0^2 + 0^2 + (z-6)^2 = 16 \ \wedge \ z < 6$

$(z-6)^2 = 16 \ \wedge \ z < 6 \ \Leftrightarrow \ (z - 6 = 4 \vee z - 6 = -4) \wedge z < 6 \ \Leftrightarrow \ z = 2$

Resposta: $B(0,0,2)$

d) O centro $(0,0,6)$ é o ponto médio de [*PQ*], sendo $P\left(\sqrt{3}, -2, 9\right)$ e $Q(x, y, z)$.

Então, tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{3}}{2}=0 \\ \dfrac{y-2}{2}=0 \\ \dfrac{z+9}{2}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

A reta paralela a Oy que passa em $Q\left(-\sqrt{3},2,3\right)$ é definida por $x=-\sqrt{3} \wedge z=3$

Resposta: $x=-\sqrt{3} \wedge z=3$

3.2.

a) O ponto P tem coordenadas $(8,0)$.

Equação da circunferência de centro P e raio 4: $(x-8)^2+y^2=16$

Resposta: $(x-8)^2+y^2=16$

b) O triângulo $[OPT]$ é equilátero e a medida do lado é 8.

Seja h a altura do triângulo em relação ao lado $[OP]$.

$h^2+4^2=8^2 \Leftrightarrow h^2=48$

Assim, $h=\sqrt{48}$, ou seja, $4\sqrt{3}$, pelo que as coordenadas do ponto T são $\left(4,4\sqrt{3}\right)$.

Resposta: $T\left(4,\,4\sqrt{3}\right)$

c) A ordenada de qualquer ponto da reta EF é igual a $4+4\sqrt{3}$, ou seja, $4\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Resposta: (C) $y=4\left(1+\sqrt{3}\right)$

4.1. Sabe-se que $E(0,0,6)$ e $B(6,0,0)$.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do plano mediador de $[BE]$.

$\overline{PB}=\overline{PE}$, pelo que: $\sqrt{(x-6)^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-6)^2}$

$x^2-12x+36+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2-12z+36 \Leftrightarrow -12x=-12z \Leftrightarrow x=z$

O plano mediador de $[BE]$ é definido pela equação $x=z$.

O ponto $M\left(k^2,7,-2k+3\right)$, $k\in\mathbb{R}$ pertence ao plano mediador de $[BE]$ se e só se

$k^2=-2k+3$.

$k^2=-2k+3 \Leftrightarrow k^2+2k-3=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow k=1 \vee k=-3$

Resposta: $k\in\{-3,1\}$

4.2. Seja V o volume do octaedro.

$$V = 2\times\left(\frac{1}{3}\times\left(\overline{BC}\right)^2\times\overline{OE}\right)$$

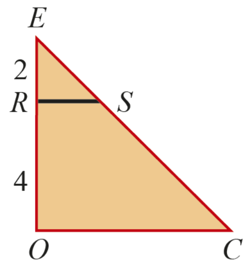
$$\overline{BC} = \sqrt{(6-0)^2+(0-6)^2+(0-0)^2} = \sqrt{72}$$

$$\overline{OE} = 6$$

Assim, $V = 2\times\left(\frac{1}{3}\times\left(\overline{BC}\right)^2\times\overline{OE}\right) = 2\times\left(\frac{1}{3}\times 72\times 6\right) = 288$.

Resposta: 288

4.3. Recorrendo ao esquema seguinte, os triângulos [*ERS*] e [*EOC*] são semelhantes.



Então, $\frac{\overline{RS}}{6} = \frac{2}{6}$. Daqui resulta que $\overline{RS} = 2$.

A metade da diagonal do quadrado resulta da interseção do plano $z = 4$ com o octaedro e mede 2. Logo, a diagonal mede 4.

Assim, designando por x o lado do quadrado, tem-se $x^2 + x^2 = 16$, ou seja, $x^2 = 8$, que corresponde à área do quadrado.

Resposta: 8