Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Caderno 1

(é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

---

1. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número:

23 345 556

Quantos desses números são pares?

(A) 2100 **(B)** 15 120 **(C)** 2520 **(D)** 1260

2. Numa escola secundária existem duas turmas do 12.º ano: a turma A e a turma B.
Sabe-se que

- a turma A tem 27 alunos, $\frac{2}{3}$ dos quais são raparigas;
- na turma B há tantos rapazes como raparigas.

2.1. Na turma A vai ser formada uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.
A comissão será formada por três alunos que desempenharão funções distintas (coordenação, angariação de fundos e relações públicas).
Ficou ainda acordado que da comissão fará parte pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga.
Quantas comissões diferentes podem ser formadas?

(A) $9\times {}^{18}C_2 + 18\times {}^{9}C_2$ **(B)** $\left(9\times {}^{18}C_2 + 18\times {}^{9}C_2\right)\times 3!$

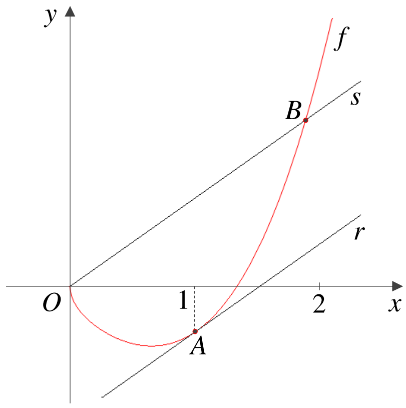
(C) $9\times {}^{18}A_2 + 18\times {}^{9}A_2$ **(D)** $\left(9\times {}^{18}A_2 + 18\times {}^{9}A_2\right)\times 3!$

2.2. Vai ser escolhido, ao acaso, um aluno do 12.º ano para participar numa reunião com a direção da escola. Para tal escolhe-se, por sorteio, uma das turmas. De seguida, também por sorteio, escolhe-se um dos alunos da turma selecionada.
Sabendo que, no final, foi escolhido um rapaz, qual é a probabilidade de este ser aluno da turma A?

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$.

Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função f;
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto A, de abcissa 1;
- a reta s, que passa na origem do referencial e interseta o gráfico de f no ponto B de abcissa $b \in \left]1, 2\right[$.



Sabe-se que as retas r e s são paralelas.

3.1. Mostre que a reta r tem declive igual a 2.

3.2. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b, abcissa do ponto B.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;
- apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

4. De uma função f de domínio $[0, 4]$, contínua no seu domínio e duas vezes diferenciável em $\left]0, 4\right[$, sabe-se que:

- $f(0) = -2$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 1$
- $f'(3) = 0$
- $f''(x) < 0, \forall x \in \left]0, 4\right[$

4.1. Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

4.2. Qual das equações seguintes pode definir uma reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2?

(A) $y = 3$ **(B)** $y = -x + 4$ **(C)** $y = 2x + 1$ **(D)** $y = 2x - 1$

Fim do Caderno 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	
10	10	15	15	15	10	10	**85**

Caderno 2

(não é permitido o uso de calculadora)

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identificam a opção escolhida.

5. De uma função f , duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

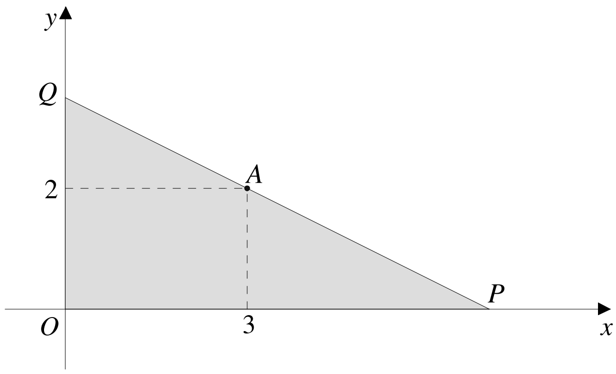
- $f(0)=0$;
- a sua derivada, f' , é dada por $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-1$.

5.1. O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ é:

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $+\infty$

5.2. Estude a função f quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

6. Na figura estão representados, em referencial ortonormado xOy , o triângulo $[OPQ]$ e o ponto A , de coordenadas $(3,2)$.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao eixo Ox e tem abcissa $x>3$;
- o ponto Q pertence ao eixo Oy ;
- a reta PQ passa no ponto A .

Seja A a função, de domínio $]3,+\infty[$, que faz corresponder à abcissa x do ponto P a área do triângulo $[OPQ]$.

6.1. Mostre que, para cada $x\in\,]3,+\infty[$, se tem $A(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$.

6.2. Estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor mínimo que a medida da área do triângulo $[OPQ]$ pode atingir.

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$.

Determine:

7.1. os zeros da função f que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$;

7.2. o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{f(x)}{3x-\pi}$.

8. Considere as sucessões (u_n) e (v_n), de termos positivos, tais que:

- $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\times v_n<1$
- $\lim u_n=+\infty$

Indique, justificando, qual é o limite de v_n.

9. Considere as funções f definidas por uma expressão do tipo $f(x)=k-x^3$, sendo k um número real positivo.

Determine o conjunto de valores de k para os quais o Teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir a existência de um zero de f no intervalo $]0, k[$.

Fim da prova

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
5.1.	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	
10	15	15	15	15	15	15	15	**115**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2								**200**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. 23 345 556

O algarismo das unidades pode ser 2, 4 ou 6.

Número de maneiras de permutar os restantes sete algarismos.

$$\frac{3\times 7!}{2!\times 3!}=1260$$

Há três algarismos iguais a 5.

Há dois algarismos iguais a 3.

Resposta: (D)

2.

2.1. $\frac{2}{3}\times 27=18$

A turma *A* é formada por 18 raparigas e 9 rapazes.

Para escolher os três membros da comissão, antes da distribuição dos cargos, há duas hipóteses, em alternativa:

- um rapaz e duas raparigas: ${}^{9}C_1\times {}^{18}C_2=9\times {}^{18}C_2$
- uma rapariga e dois rapazes: ${}^{18}C_1\times {}^{9}C_2=18\times {}^{9}C_2$

Portanto, os elementos da comissão podem ser escolhidos de $9\times {}^{18}C_2+18\times {}^{9}C_2$ maneiras diferentes.

Dado que os três cargos podem ser distribuídos pelos três elementos de $3!$ maneiras diferentes, o número pedido é: $\left(9\times {}^{18}C_2+18\times {}^{9}C_2\right)\times 3!$

Resposta: (B)

2.2. Sejam os acontecimentos:

A: "O aluno escolhido é da turma *A*"

B: "O aluno escolhido é da turma *B*"

M: "O aluno escolhido é um rapaz"

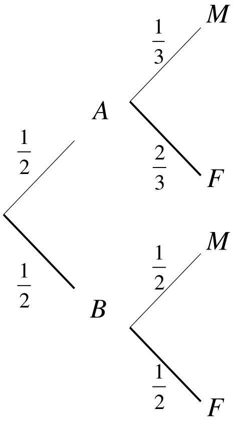
F: "O aluno escolhido é uma rapariga"

Sabe-se que:

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

$P(F\mid A)=\frac{2}{3}$ e $P(M\mid A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(M\mid B)=P(F\mid B)=\frac{1}{2}$



Pretende-se determinar $P(A\mid M)$.

$$P(A\mid M)=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}=\frac{P(A\cap M)}{P(A\cap M)+P(B\cap M)}=$$

$$=\frac{P(A)\times P(M\mid A)}{P(A)\times P(M\mid A)+P(B)\times P(M\mid B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{12}{6\times 5}=\frac{2}{5}$$

3. $f(x) = x^3 - 2\sqrt{x}$

3.1. O declive da reta r é $f'(1)$.

$$f'(x) = \left(x^3 - 2\sqrt{x}\right)' = \left(x^3\right)' - 2\left(\sqrt{x}\right)' = 3x^2 - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 3\times1^2 - \frac{1}{\sqrt{1}} = 3 - 1 = 2$$

Portanto, o declive da reta r é igual a 2.

3.2. Como as retas r e s são paralelas, têm o mesmo declive, ou seja, a reta s tem declive 2.

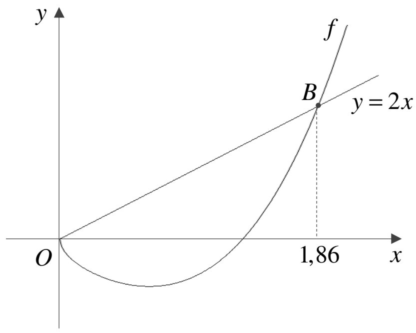
Se a reta s passa na origem e tem declive igual a 2, então pode ser definida pela equação $y = 2x$.

O ponto B é a interseção, no intervalo $]1, 2[$, do gráfico de f com a reta s.

Portanto, uma equação que traduz o problema é $f(x) = 2x$.

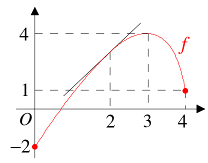
Recorrendo à calculadora, visualizamos o gráfico de f, a reta de equação $y = 2x$ e determinamos as coordenadas do ponto B, interseção do gráfico com a reta.

Podemos concluir que $b \approx 1{,}86$.



4.

4.1. Se f é contínua em $[0, 4]$, então é contínua em $[0, 3]$. Logo, como $f(0)\times f(3) < 0$, o Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de pelo menos um zero em $]0, 3[$.



Como f é contínua em $[0, 4]$ e $f''(x) < 0, \forall x \in]0, 4[$, então f' é estritamente decrescente em $[0, 4]$. Assim, como $f'(3) = 0$, tem-se que $f'(x) > 0$ no intervalo $]0, 3[$ e $f'(x) < 0$ no intervalo $]3, 4[$ pelo que se pode concluir que a função f é estritamente crescente em $[0, 3]$ e estritamente decrescente em $[3, 4]$.

Portanto, no intervalo $]0, 3[$, o zero de f cuja existência se provou é único. Por outro lado, como f é estritamente decrescente em $[3, 4]$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 1$ tem-se que $\forall x \in [3,4], 1 \leq f(x) \leq 4$, ou seja, a função f tem um único zero.

Resposta: (B)

4.2. Já vimos que $f'(x) > 0$ no intervalo $]0, 3[$. Portanto, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 é positivo (opções (C) e (D)).

Dado que f é estritamente crescente em $[0, 3]$, $f(0) = -2$ e $f(3) = 4$ tem-se que, para todo $x \in [3,4]$ $-2 \leq f(x) \leq 4$. Assim, a ordenada do ponto de tangência, $f(2)$, está compreendida entre -2 e 4.

Na opção **(C)**, $y = 2x + 1$, se $x = 2$, vem $y = 2\times2 + 1 = 5 \notin [-2,4]$.

Na opção **(D)**, $y = 2x - 1$, se $x = 2$, vem $y = 2\times2 - 1 = 3 \in [-2,4]$.

Resposta: (D)

Caderno 2

5. $f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{x}{x^2+1}-1$$

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{0}{0^2+1}-1=-1$

Resposta: (C)

5.2. $f''(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}-1\right)'=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}-0=\frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=$

$$=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$$

Como $\forall x\in\mathbb{R},\ (x^2+1)^2>0$, o sinal de f'' é o sinal de $-x^2+1$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$
		P.I.		P.I.	

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1[$. Os pontos de abcissas -1 e 1 são pontos de inflexão.

6. $A(3,2)$ e $P(x,0)$

6.1. Seja $Q(0,y)$.

Precisamos de exprimir y em função de x.

Dado que Q, A e P pertencem à mesma reta temos que o declive de QA (m_{QA}) é igual ao declive de AP (m_{AP}).

$$m_{QA}=\frac{y-2}{-3} \text{ e } m_{AP}=\frac{-2}{x-3}$$

$$m_{QA}=m_{AP} \Leftrightarrow \frac{y-2}{-3}=\frac{-2}{x-3} \Leftrightarrow y-2=-3\times\frac{-2}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=2+\frac{6}{x-3} \Leftrightarrow y=\frac{2x-6+6}{x-3} \Leftrightarrow y=\frac{2x}{x-3}$$

Portanto, como $x>3$, temos:

$$\overline{OP}=x \text{ e } \overline{OQ}=y=\frac{2x}{x-3}$$

A área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $\frac{\overline{OP}\times\overline{OQ}}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}$

Logo, $A(x)=\frac{1}{2}\times x\times\frac{2x}{x-3} \Leftrightarrow A(x)=\frac{x^2}{x-3}$.

6.2. $A'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)'=\dfrac{\left(x^2\right)'(x-3)-\left(x^2\right)(x-3)'}{(x-3)^2}=\dfrac{2x(x-3)-x^2\times 1}{(x-3)^2}=$

$$=\frac{2x^2-6x-x^2}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

$$A'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}=0\wedge x>3\Leftrightarrow x^2-6x=0\wedge x>3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-6)=0\wedge x>3\Leftrightarrow (x=0\vee x-6=0)\wedge x>3\Leftrightarrow x=6$$

Como $x>3$, o sinal de A' depende apenas do fator $x-6$.

x	3		6	$+\infty$
A'		$-$	0	$+$
A		$\searrow$	12	$\nearrow$
			Mín.	

O valor mínimo que a medida da área do triângulo $[OPQ]$ pode atingir é:

$$A(6)=\frac{6^2}{6-3}=\frac{36}{3}=12\text{ u.a.}$$

7. $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

7.1. $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=$

$$=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$f(x)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-x=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{4\pi}{3}$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$$

7.2. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{-3\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=-\frac{2}{3}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\frac{\pi}{3}-x}=$

$$=-\frac{2}{3}\times\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{2}{3}\times 1=-\frac{2}{3}$$

$y=\dfrac{\pi}{3}-x$

Se $x\to\dfrac{\pi}{3}$, $y\to 0$.

8. Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \times v_n < 1$ e dado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, podemos concluir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < \dfrac{1}{u_n}$.

Por outro lado, se $\lim u_n = +\infty$, então: $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Assim: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < \dfrac{1}{u_n}$ e $\lim 0 = \lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Portanto, pelo teorema das sucessões enquadradas, temos que $\lim v_n = 0$.

9. $f(x) = k - x^3$

Qualquer que seja o valor de k , a função f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser uma função polinomial. Logo, f é contínua em qualquer intervalo do tipo $[0\,,\,k]$.

O Teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir a existência de um zero de f no intervalo $]0\,,\,k[$ para os valores de k tais que $f(0) \times f(k) < 0$.

$f(0) = k - 0^3 = k$ e $f(k) = k - k^3$

$f(0) \times f(k) < 0 \Leftrightarrow k\left(k - k^3\right) < 0 \wedge k > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2\left(1 - k^2\right) < 0 \wedge k > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - k^2 < 0 \wedge k > 0 \Leftrightarrow$

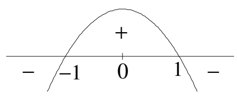
$\Leftrightarrow \left(k < -1 \vee k > 1\right) \wedge k > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \in \left]1\,,+\infty\right[$

$k^2 > 0\,, \forall k \in \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar

$1 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$



O Teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de um zero de f no intervalo $]0\,,\,k[$ para $k \in \left]1\,,+\infty\right[$.