EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2009

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de nove.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$

$(r$ – *raio da base*; g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$

$(r$ – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3 \quad (r$ – *raio*$)$

Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Complexos

$$(\rho\ cis\ \theta)^n = \rho^n cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\ cis\ \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$$

$$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

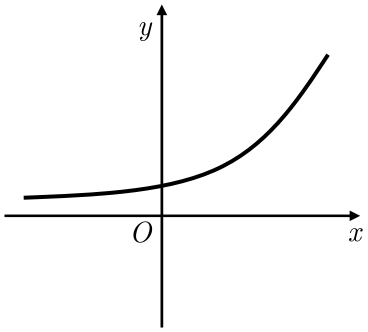
Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

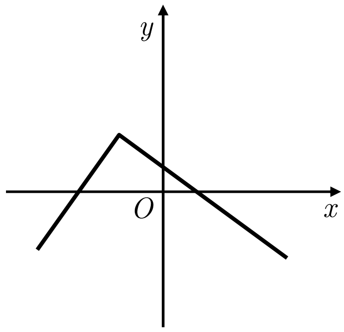
1. De uma função g derivável em $\mathbb{R}$, sabe-se que o seu gráfico tem **apenas** um ponto de inflexão.

Qual dos seguintes pode representar o gráfico da função g'', **segunda derivada** de g?

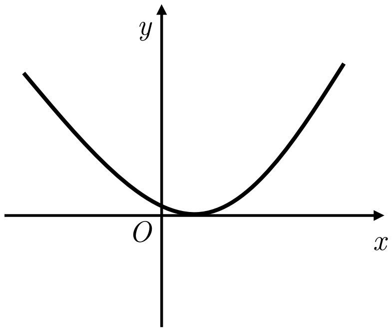
(A)



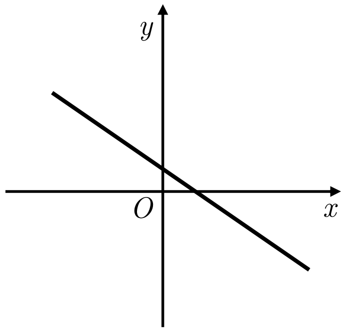
(B)



(C)



(D)

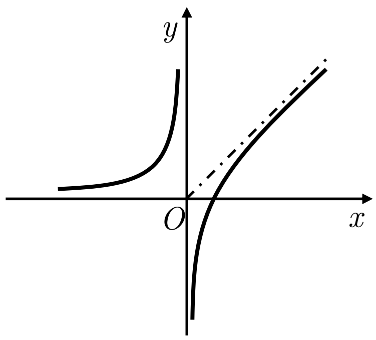


2. Um número real a é tal que $\operatorname{tg}(a) = 2$

Qual é o valor de $\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$?

(A) -1 **(B)** -3 **(C)** -5 **(D)** -7

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e cujo gráfico se encontra a seguir representado:



Tal como a figura sugere, o gráfico de f admite três assimptotas, o eixo Ox, o eixo Oy e a bissectriz dos quadrantes ímpares.

Sejam $A = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $B = \lim_{x \to 0^-} f(x)$. Qual é a proposição verdadeira?

(A) $A = 0$ e $B = +\infty$ **(B)** $A = 1$ e $B = +\infty$

(C) $A = 0$ e $B = -\infty$ **(D)** $A = 1$ e $B = -\infty$

4. Seja x um número real positivo tal que $\log_2 x = \sqrt{2}$.

Qual é o valor de $\log_2 (4x^2)$?

(A) $2 + \log_2 \sqrt{2}$ **(B)** $1 + \log_2 \sqrt{2}$ **(C)** $2 + 2\sqrt{2}$ **(D)** $1 + \sqrt{2}$

5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, paus, copas e ouros. Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

De um baralho completo extraem-se, simultaneamente, seis cartas.
Qual é a probabilidade de haver **um só** Ás nessas seis cartas?

(A) $\dfrac{4 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$ **(B)** $\dfrac{4 \times {}^{52}C_5}{{}^{52}C_6}$ **(C)** $\dfrac{4 \times 48}{52 \times 51}$ **(D)** $\dfrac{4 \times 52}{52 \times 51}$

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes
- $P(A) = 0,4$
- $P(B) = 0,5$

Qual é o valor da probabilidade $P(A \cup B)$?

(A) $0,5$ **(B)** $0,6$ **(C)** $0,7$ **(D)** $0,8$

7. Das condições a seguir representadas, apenas uma **não** representa uma recta vertical no plano complexo.
Qual é essa condição?

(A) $|z-5| = |z+2|$ **(B)** $|z+5| = |z-2|$ **(C)** $|z| = 5$ **(D)** $\mathrm{Re}(z) = 5$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z = x - 2i$, $x \in \mathbb{R}$ e seja A a sua imagem geométrica no plano complexo.

1.1. Nesta alínea, admita que $x = 2$. **Sem usar a calculadora**, determine, na forma algébrica, z^4.

Sugestão: escreva primeiro z na forma trigonométrica.

1.2. Considere agora que, no plano complexo, o ponto A pertence ao quarto quadrante e seja B a imagem geométrica do complexo $\overline{z}$, conjugado de z.

Sendo O a origem do plano complexo, **represente** o triângulo $[ABO]$ no plano complexo.

Sabendo que a área desse triângulo é igual a 10, **escreva** z na forma algébrica.

2. Uma roleta tem inscrita os números 0, 1 e 2. Quando ela gira, os acontecimentos “sair número 0”, “sair número 1” e “sair número 2” são equiprováveis.

Admita que se faz-se girar a roleta duas vezes e anota-se o número que saiu em cada uma das vezes.

2.1. Seja X a variável aleatória «*produto dos números saídos*».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

Sugestão: construa primeiro uma tabela de dupla entrada que relacione as duas vezes em que a roleta é girada.

2.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «*o número saído em 1.º lugar é ímpar*»;

B: «*o número saído em 2.º lugar é positivo*».

Indique, justificando, o valor da probabilidade $P(A \cap B)$.
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. A partir de Setembro de 2009, o recém-inaugurado Centro Nacional de Reprodução do Lince-Ibérico irá receber 16 linces.
Admita que o Centro irá tomar medidas para que o número de linces aumente continuamente (não havendo limite máximo) e que, daqui a 5 anos, haja **pelo menos** 20 exemplares.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função L que dá o número aproximado de linces-ibéricos existentes no Centro Nacional de Reprodução, t anos após Setembro de 2009.

(A) $15 + t + 0{,}1t^2$ **(B)** $\frac{40}{1+1{,}5e^{-0{,}1t}}$ **(C)** $50\log(t+10) - 34$ **(D)** $16e^{0{,}01t}$

($\log$ designa logaritmo de base 10)

Qual é a expressão correcta? Numa pequena composição, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três expressões (**apresente três razões diferentes, uma por cada expressão rejeitada**).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s)**.

4. É dada a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

4.1. Mostre que o gráfico de h intersecta o eixo Ox num só ponto e indique a sua abcissa.

4.2. Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa 1.

5. Seja g a função, de domínio $]0,\pi[$, definida por $g(x) = \frac{2x}{\operatorname{sen} x}$

5.1. Mostre que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

5.2. **Sem recorrer à calculadora**, verifique que a recta de equação $x = 0$ não é uma assimptota do gráfico de g.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 11
1.2. 10

2. 32
2.1. 20
2.2. 12

3. 20

4. 32
4.1. 15
4.2. 17

5. 32
5.1. 16
5.2. 16

TOTAL **200**