EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2008

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\ r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Complexos

$$(\rho\ cis\ \theta)^n = \rho^n cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\ cis\ \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Grupo I

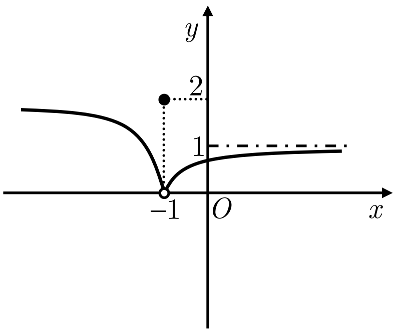
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

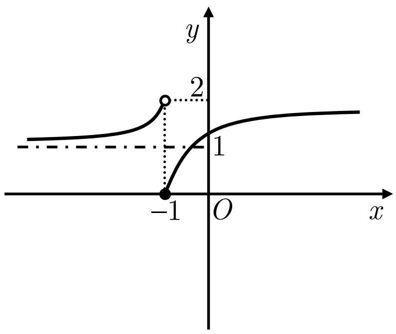
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \; ; \qquad \lim_{x\to-1^-} g(x) = 2 \; ; \qquad \lim_{x\to-1^+} g(x) = 0$$

Qual dos seguintes pode representar o gráfico de g ?

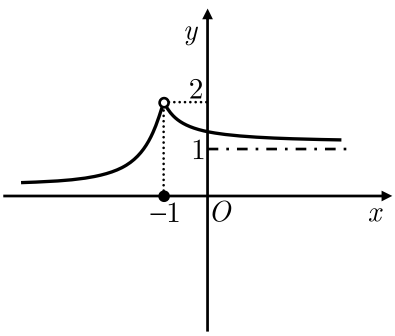
(A)



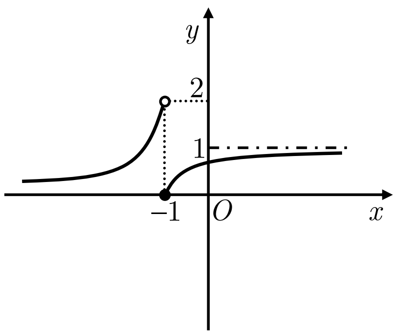
(B)



(C)



(D)



2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \log_2\left(4x\right)$. O gráfico de g passa num ponto de ordenada 3. Qual é a abcissa desse ponto?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 + k & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Para um determinado valor de k, f é contínua em $\mathbb{R}$. Qual é esse valor de k?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1

4. É dada a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = e^{5x}$.
Qual é a expressão da função $h''(x)$, **segunda derivada** de h?

(A) $5e^{5x}$ **(B)** $25e^{5x}$ **(C)** $5\ln(5x)$ **(D)** $25\ln(5x)$

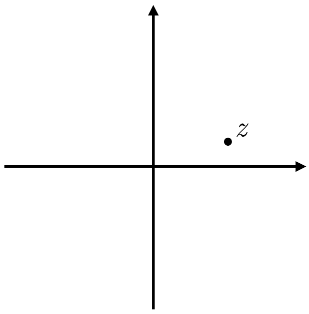
5. Em relação a um grupo de alunos de uma universidade, sabe-se que a sua idade, em anos, pode ser considerada uma variável bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 20.
Além disso, sabe-se também que há 30% de alunos com idades entre os 20 e os 22 anos.
Escolhe-se, ao acaso, um desses alunos. Qual é a probabilidade de ele ter menos de 18 anos?

(A) 20% **(B)** 25% **(C)** 30% **(D)** 35%

6. A soma dos dois primeiros números de certa linha do triângulo de Pascal é igual a 60.
Quantos elementos tem essa linha?

(A) 58 **(B)** 59 **(C)** 60 **(D)** 61

7. Na figura está representada, no plano complexo, a imagem geométrica do número complexo z.



Qual pode ser um argumento do complexo **simétrico** de z ?

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $-\frac{\pi}{5}$ **(C)** $\frac{4\pi}{5}$ **(D)** $-\frac{4\pi}{5}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = 2\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$.

1.1. **Sem usar a calculadora**, mostre que z_1 é uma raiz cúbica de z_2.

1.2. Seja A a região do plano complexo definida pela condição

$$\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(z_2) \quad \wedge \quad |z| \leq 1$$

Represente graficamente A.

2. A Denisa tem na estante do seu quarto vários livros: três livros de poesia, quatro dicionários e cinco romances.

2.1. Para realizar diversos trabalhos, a Denisa decidiu escolher seis desses livros. De quantas maneiras pode ela fazer a sua escolha?

2.2. Sabe-se que apenas dois dos dicionários não estão escritos na língua portuguesa.
Escolhe-se um livro da estante ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o livro está escrito em português»;

B: «o livro é um dicionário».

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B \mid A)$.
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: no caso de utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explicite os valores das duas probabilidades envolvidas nessa fórmula.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam X e Y dois acontecimentos possíveis de Ω. Sabe-se que:

- X e Y são acontecimentos equiprováveis;
- $P(X) = 0{,}6$.

Prove que X e Y não podem ser acontecimentos incompatíveis.

4. Admita que a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, t anos após 1900, pela função definida por

$$N(t) = \frac{9{,}8}{1+0{,}9e^{-0{,}036t}}, \ t \geq 0$$

4.1. Calcule $N(0)$ e $\lim_{t \to +\infty} N(t)$. Apresente os valores obtidos arredondados às décimas e interprete-os, no contexto do problema.

4.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 8 milhões de habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

5. Seja f a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x - 1$

5.1. **Sem recorrer à calculadora**, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função f.

5.2. **Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize, na janela $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-2, 4\right]$, o gráfico da função f.

Reproduza, na sua folha de teste, um referencial o.n. xOy e o gráfico de f, visualizado na calculadora.

Assinale ainda:

- o ponto O, origem do referencial;
- o ponto A do gráfico de f de abcissa 0;
- o ponto B de intersecção entre o gráfico de f e o eixo Ox, indicando a sua abcissa, com aproximação às décimas.

Determine a **área do triângulo** $[ABO]$, apresentando o resultado final arredondado às décimas.

6. É dada a função h, de domínio $\left]-5, +\infty\right[$, definida por $h(x) = \ln(x+5)$.

6.1. Mostre que $h\left(\frac{3}{e}\right) = \ln(3+5e) - 1$

6.2. **Sem recorrer à calculadora**, justifique que a função h não tem extremos relativos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada.. 0

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 12
- **1.2.** 9

2. 20
- **2.1.** 8
- **2.2.** 12

3. 12

4. 28
- **4.1.** 12
- **4.2.** 16

5. 28
- **5.1.** 14
- **5.2.** 14

6. 28
- **6.1.** 14
- **6.2.** 14

TOTAL **200**