

Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos



www.esaas.com

Duração da prova: 150 minutos

2.ª FASE

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de 12.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

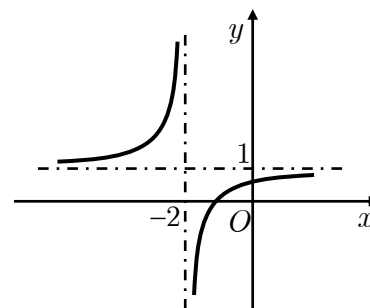
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e cujo gráfico se encontra ao lado.
Tal como a figura sugere, o gráfico de f admite as assíntotas de equações $x = -2$ e $y = 1$.



Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$?

- (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$
2. De uma função g , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que $g(0) = 3$ e $g(3) = 0$.
Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?
- (A) $0 \leq g(2) \leq 3$ (B) A função g não tem zeros em $[0, 3]$
- (C) $g(2) > g(3)$ (D) 2 pertence ao contradomínio de g

3. A segunda derivada de uma função h , de domínio \mathbb{R} , é dada por

$$h''(x) = (x - 1)(x + 2)^2$$

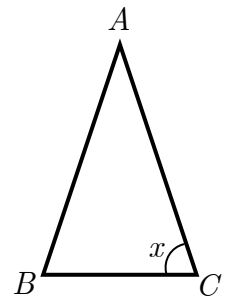
Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de h ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. Na figura está representado um triângulo isósceles $[ABC]$ em que $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$.
Seja x a amplitude do ângulo ACB .

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[ABC]$ em função de x ?

- (A) $\sin x + \cos x$ (B) $\sin x - \cos x$
(C) $\sin x \cdot \cos x$ (D) $\frac{\sin x}{\cos x}$



5. O segundo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 35.
Qual é o terceiro número dessa linha?

- (A) 105 (B) 350 (C) 595 (D) 6545

6. Admita que a variável *altura*, em centímetros, das crianças de um certo infantário, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 70.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 10% das crianças desse infantário têm uma altura superior a 80 cm.

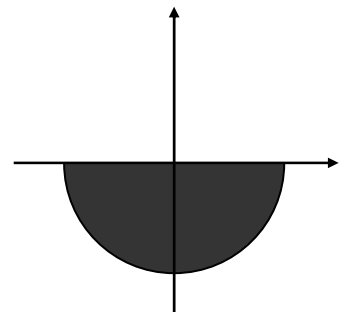
Escolhida, ao acaso, uma criança desse infantário, qual é a probabilidade de a sua altura estar compreendida entre 60 cm e 70 cm ?

- (A) 30% (B) 35% (C) 40% (D) 45%

7. Na figura está representado, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem do referencial e raio igual a 1.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

- (A) $|z| \leq 1 \wedge \pi \leq \text{Arg}(z) \leq 2\pi$
(B) $|z| \leq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{2}$
(C) $|z| \geq 1 \wedge \pi \leq \text{Arg}(z) \leq 2\pi$
(D) $|z| \geq 1 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{2}$



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1 + \sqrt{7}i \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{8\text{cis}\frac{\pi}{5}}{2 + 2i}$$

1.1. Considere a equação $z^3 = z_1 + 7 - \sqrt{7}i$.

Sem usar a calculadora, resolva, em \mathbb{C} , a equação anterior, apresentando as soluções na forma trigonométrica e simplificando-as o mais possível.

1.2. Sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de z_2 , respectivamente.

Mostre que, num referencial o.n. xOy , $\overline{AO} = \overline{BO}$.

2. O número de habitantes de uma cidade, em **milhares**, é dada, após t anos, pela função definida por

$$N(t) = \frac{k}{1 + 4e^{-t}} \quad (k \text{ é uma constante positiva})$$

Suponha que o valor de $t = 0$ corresponde ao início de 2000 e que, no início desse ano, havia 20 mil habitantes nessa cidade.

2.1. Mostre que $k = 100$.

2.2. De acordo com este modelo, qual foi a população dessa cidade no início do mês de **Julho** de 2006? Apresente o resultado em milhares de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

2.3. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população dessa cidade foi de 5 mil habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

3. Num aquário em forma de um **prisma quadrangular regular**, pretende-se pôr uma faixa rectangular (a sombreado na figura) numa das faces laterais com menos 1 metro de largura de cada lado (como se pode ver nessa figura) para poder colocar algumas características dos peixes.

O aquário tem uma capacidade de 100 **metros cúbicos** e a área de cada base quadrada não pode ser superior a 36 metros quadrados.



Seja x o lado do quadrado da base (em metros).

- 3.1. Justifique que o comprimento da faixa rectangular é dada, em metros e em função de x , por

$$C(x) = \frac{100}{x^2}$$

- 3.2. Mostre que a área total dessa faixa é dada, em metros quadrados e em função de x , por

$$A(x) = \frac{100x - 200}{x^2}$$

- 3.3. **Sem usar a calculadora**, determine a área máxima da faixa rectangular. Apresente o resultado em metros quadrados, arredondados às décimas.

4. Foi medida, numa certa região, a temperatura do ar durante 12 horas. Sabe-se que:

- No início da contagem, a temperatura foi de 25° centígrados;
- Em seguida, a temperatura baixou, voltando depois a subir;
- A temperatura máxima registada foi igual a 30° centígrados.

Assim, concluiu-se que a relação entre a temperatura do ar e o tempo t , contado em horas a partir do instante em que se começou a medir a temperatura, é modelada por uma, e **uma só**, das quatro funções, a , b , c e d , definidas a seguir:

$$a(t) = 30 + \frac{42}{t-14}$$

$$b(t) = 25 - 0,08t^3 + 1,5t^2 - 6,75t$$

$$c(t) = 27,5 - 2,5 \cos(0,6t)$$

$$d(t) = 25 - 5 \sin(0,5t)$$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos e a variável t está em horas).

Qual das quatro funções é a correcta? Numa pequena composição, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três funções (**apresente três razões diferentes, uma por cada função rejeitada**).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s).**

5. Os funcionários de uma empresa praticam dois desportos.

5.1. Sobre esses funcionários, sabe-se que:

- metade dos funcionários pratica futebol
- 30% dos funcionários pratica futebol e atletismo.
- 10% dos funcionários não praticam nem futebol nem atletismo.

Escolhe-se um funcionário da empresa ao acaso.

5.1.1. Qual é a probabilidade de o funcionário praticar **apenas** atletismo?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

5.1.2. Suponha que o funcionário é um praticante de futebol. Qual é a probabilidade de ele também praticar atletismo?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. Admita que há dez funcionários que vão entrar no campo de futebol, um de cada vez. Se nesse grupo houver três mulheres, qual é a probabilidade de elas entrarem em primeiro lugar?
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondada às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada.....0

Grupo II137

1. 21

1.1.12

1.2.9

2. 34

2.1.10

2.2.10

2.3.14

3. 36

3.1.8

3.2.12

3.3.16

4. 14

5. 32

5.1.20

5.1.1.10

5.1.2.10

5.2.12

TOTAL200