Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

www.esaas.com

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 2

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de 12.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$

(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n cis\,(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\, \frac{\theta + 2k\pi}{n}\,,\; k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

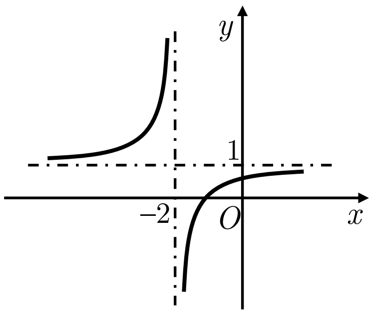
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e cujo gráfico se encontra ao lado.
Tal como a figura sugere, o gráfico de f admite as assimptotas de equações $x = -2$ e $y = 1$.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** -2 **(C)** 1 **(D)** 0

2. De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que $g(0) = 3$ e $g(3) = 0$.
Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) $0 \leq g(2) \leq 3$

(B) 2 pertence ao contradomínio de g

(C) $g(2) > g(3)$

(D) A função g não tem zeros em $[0, 3]$

3. A segunda derivada de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$h''(x) = (x-1)(x+2)^2$$

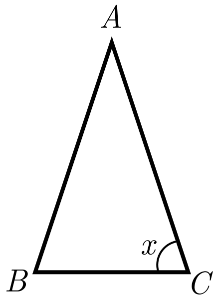
Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de h?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 1 **(D)** 2

4. Na figura está representado um triângulo isósceles $[ABC]$ em que $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$.

Seja x a amplitude do ângulo ACB.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[ABC]$ em função de x?



(A) $\operatorname{sen} x - \cos x$ **(B)** $\operatorname{sen} x + \cos x$

(C) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ **(D)** $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

5. O segundo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 35.
Qual é o terceiro número dessa linha?

(A) 6545 **(B)** 595 **(C)** 350 **(D)** 105

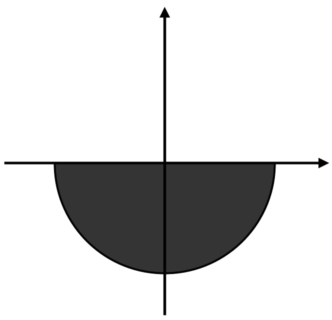
6. Admita que a variável *altura*, em centímetros, das crianças de um certo infantário, é bem modelada por uma distribuição normal, de valor médio 70.

Sabe-se ainda que, nessa escola, 10% das crianças desse infantário têm uma altura superior a 80 cm.

Escolhida, ao acaso, uma criança desse infantário, qual é a probabilidade de a sua altura estar compreendida entre 60 cm e 70 cm ?

(A) 40% **(B)** 45% **(C)** 30% **(D)** 35%

7. Na figura está representado, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem do referencial e raio igual a 1.



Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z| \geq 1 \quad \wedge \quad \pi \leq Arg(z) \leq 2\pi$

(B) $|z| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$

(C) $|z| \leq 1 \quad \wedge \quad \pi \leq Arg(z) \leq 2\pi$

(D) $|z| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1 + \sqrt{7}\, i$ e $z_2 = \dfrac{8cis\,\frac{\pi}{5}}{2+2i}$

1.1. Considere a equação $z^3 = z_1 + 7 - \sqrt{7}\, i$.

Sem usar a calculadora, resolva, em $\mathbb{C}$, a equação anterior, apresentando as soluções na forma trigonométrica e simplificando-as o mais possível.

1.2. Sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de z_2, respectivamente.

Mostre que, num referencial o.n. xOy, $\overline{AO} = \overline{BO}$.

2. O número de habitantes de uma cidade, em **milhares**, é dada, após t anos, pela função definida por

$$N(t) = \frac{k}{1+4e^{-t}} \quad (k \text{ é uma constante positiva})$$

Suponha que o valor de $t = 0$ corresponde ao início de 2000 e que, no início desse ano, havia 20 mil habitantes nessa cidade.

2.1. Mostre que $k = 100$.

2.2. De acordo com este modelo, qual foi a população dessa cidade no início do mês de **Julho** de 2006? Apresente o resultado em milhares de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

2.3. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população dessa cidade foi de 5 mil habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

3. Num aquário em forma de um **prisma quadrangular regular**, pretende-se pôr uma faixa rectangular (a sombreado na figura) numa das faces laterais com menos 1 metro de largura de cada lado (como se pode ver nessa figura) para poder colocar algumas características dos peixes.
O aquário tem uma capacidade de 100 **metros cúbicos** e a área de cada base quadrada não pode ser superior a 36 metros quadrados.

Seja x o lado do quadrado da base (em metros).

3.1. Justifique que o comprimento da faixa rectangular é dada, em metros e em função de x, por

$$C(x) = \frac{100}{x^2}$$

3.2. Mostre que a área total dessa faixa é dada, em metros quadrados e em função de x, por

$$A(x) = \frac{100x - 200}{x^2}$$

3.3. **Sem usar a calculadora**, determine a área máxima da faixa rectangular.
Apresente o resultado em metros quadrados, arredondados às décimas.

4. Foi medida, numa certa região, a temperatura do ar durante 12 horas. Sabe-se que:

- No início da contagem, a temperatura foi de 25^{o} centígrados;
- Em seguida, a temperatura baixou, voltando depois a subir;
- A temperatura máxima registada foi igual a 30^{o} centígrados.

Assim, concluiu-se que a relação entre a temperatura do ar e o tempo t, contado em horas a partir do instante em que se começou a medir a temperatura, é modelada por uma, **e uma só**, das quatro funções, a, b, c e d, definidas a seguir:

$a(t) = 30 + \frac{42}{t-14}$ $\qquad$ $b(t) = 25 - 0,08t^3 + 1,5t^2 - 6,75t$

$c(t) = 27,5 - 2,5\cos(0,6t)$ $\qquad$ $d(t) = 25 - 5\,\mathrm{sen}(0,5t)$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos e a variável t está em horas).

Qual das quatro funções é a correcta? Numa pequena composição, explique as razões que o levam a rejeitar as outras três funções (**apresente três razões diferentes, uma por cada função rejeitada**).

Nota: poder-lhe-á ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtidos(s)**.

5. Os funcionários de uma empresa praticam dois desportos.

5.1. Sobre esses funcionários, sabe-se que:

- metade dos funcionários pratica futebol
- 30% dos funcionários pratica futebol e atletismo.
- 10% dos funcionários não praticam nem futebol nem atletismo.

Escolhe-se um funcionário da empresa ao acaso.

5.1.1. Qual é a probabilidade de o funcionário praticar **apenas** atletismo?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

5.1.2. Suponha que o funcionário é um praticante de futebol. Qual é a probabilidade de ele também praticar atletismo?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. Admita que há dez funcionários que vão entrar no campo de futebol, um de cada vez. Se nesse grupo houver três mulheres, qual é a probabilidade de elas entrarem em primeiro lugar?
Apresente o resultado na forma de dízima, arredondada às milésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada...0

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 12
- **1.2.** 9

2. 34
- **2.1.** 10
- **2.2.** 10
- **2.3.** 14

3. 36
- **3.1.** 8
- **3.2.** 12
- **3.3.** 16

4. 14

5. 32
- **5.1.** 20
  - **5.1.1.** 10
  - **5.1.2.** 10
- **5.2.** 12

TOTAL **200**