

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

1.ª FASE

2009

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$

(r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

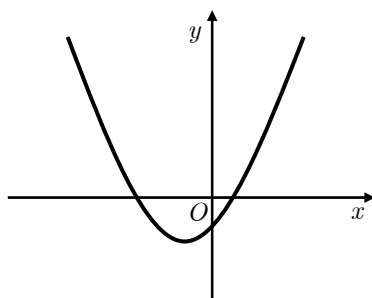
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função f' , **primeira derivada** de uma função f de domínio \mathbb{R} .



Em qual dos conjuntos seguintes pode a função f ser **crescente**?

- (A) $] -\infty, -3[\cup] 1, +\infty[$ (B) $] -\infty, -5[\cup] -3, +\infty[$ (C) $] -3, 1[$ (D) $] -1, 3[$
2. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x}$?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
3. Seja g uma função de domínio \mathbb{R} definida por $g(x) = e^{2x}$.
O gráfico de g passa num ponto de ordenada 5. Qual é a abcissa desse ponto?
- (A) $\ln 5$ (B) e^5 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{\ln 5}{2}$

4. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \cos(x + \pi) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Quanto à continuidade no ponto de abscissa 0, a função h :

- (A) É contínua somente à sua direita; (B) É contínua somente à sua esquerda;
 (C) É contínua nesse ponto; (D) É descontínua à esquerda e à direita.

5. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	a	$3a$	a

(a designa um número real)

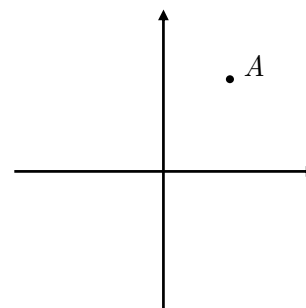
Indique o valor de a .

- (A) 0 (B) 0,1 (C) 0,2 (D) 0,3

6. Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem 21 elementos. Qual é o maior número dessa linha?

- (A) ${}^{20}C_9$ (B) ${}^{21}C_9$ (C) ${}^{20}C_{10}$ (D) ${}^{21}C_{10}$

7. Na figura ao lado está representada, no plano complexo, a imagem geométrica A de um número w .



Qual é o número complexo que pode ser igual a \bar{w} ?

- (A) $\text{cis } \frac{2\pi}{3}$ (B) $\text{cis } \frac{4\pi}{3}$
 (C) $\text{cis } \frac{5\pi}{3}$ (D) $\text{cis } \frac{7\pi}{3}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 4 - 3i$ e $z_2 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

1.1. **Sem usar a calculadora**, determine o valor de $\frac{z + \binom{z}{2}}{-1+i}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

1.2. Represente graficamente a região do plano complexo definida pela condição

$$0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \operatorname{Arg}(z_2) \wedge |z| \leq 1$$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{3e^x}{x}$

Sem recorrer à calculadora (excepto para eventuais cálculos numéricos), resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais do seu gráfico.

2.2. Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos.

3. Admita que após um plano de recuperação, o número de elefantes numa reserva (em **centenas** de habitantes), é dada aproximadamente, t anos após o final de 2000, pela função definida por

$$E(t) = \frac{12}{1+10e^{-0,08t}}, t \geq 0$$

3.1. Calcule o número de elefantes na reserva previstos para o final do presente ano (2009). Apresente o valor em centenas de habitantes arredondado às unidades.

3.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população de elefantes na reserva será de 8 centenas de habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Sejam g uma função real e g' a sua derivada, ambas de domínio \mathbb{R} , e tais que $g'(x) = x - \sin(2x)$

4.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{g(x) - g(2\pi)}{x - 2\pi}$.

4.2. No intervalo $]0, \pi[$, o gráfico de g contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo das abcissas.

Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu.

5. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos (15 raparigas e 10 rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.

A comissão será formada por cinco pessoas: um presidente, um tesoureiro e três vogais.

5.1. Quantas comissões distintas podem ser formadas se só houver raparigas?

5.2. Quantas comissões distintas podem ser formadas se a única rapariga for o tesoureiro?

6. Considere o seguinte problema:

Numa caixa estão dez bolos de igual aspecto exterior. No entanto, metade dos bolos não têm creme.

Retiram-se da caixa três desses bolos ao acaso.

Qual é a probabilidade de que pelo menos dois dos bolos tenham creme?

Uma resposta correcta para este problema é $\frac{5 \times {}^5 C_2 + {}^5 C_3}{{}^{10} C_3}$

Numa pequena composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à Regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

FIM

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

COTAÇÕES

Grupo I	63
Cada resposta certa	9
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0
Grupo II	137
1.	21
1.1.	12
1.2.	9
2.	32
2.1.	16
2.2.	16
3.	26
3.1.	10
3.2.	16
4.	26
4.1.	13
4.2.	13
5.	20
5.1.	10
5.2.	10
6.	12
TOTAL	200