

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

1.ª FASE

2008

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

**VERSÃO 1**

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de doze.

## Formulário

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$

( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$

( $r$  – raio)

### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

### Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

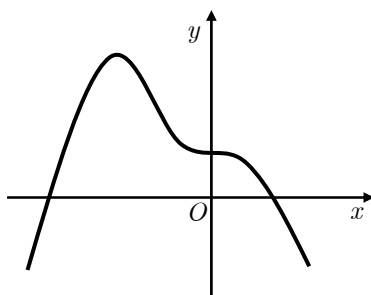
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

## Grupo I

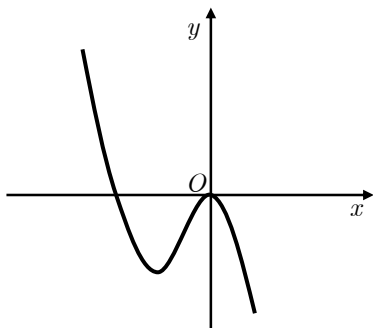
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$ .

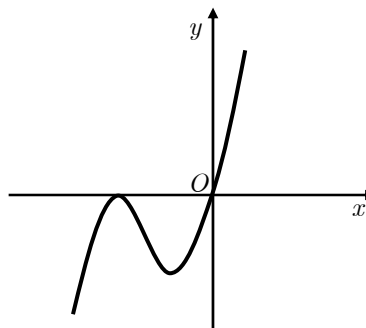


Qual das seguintes pode ser a representação gráfica da função  $f'$ , **primeira derivada** de  $f$ ?

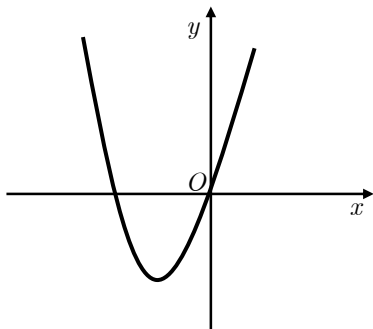
(A)



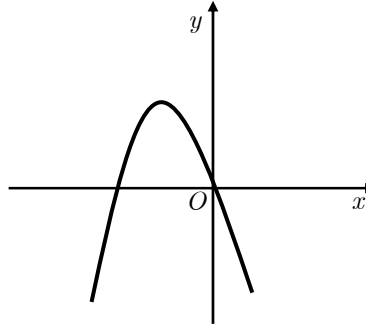
(B)



(C)



(D)

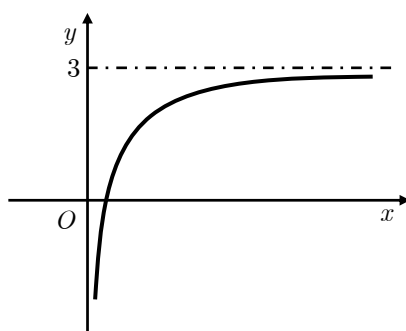


2. Seja  $g$  uma função de domínio  $\mathbb{R}^+$  definida por  $g(x) = \log_5(5x^3)$ .

Qual das seguintes expressões pode também definir a função  $g$ ?

- (A)  $3 \log_5(5x)$       (B)  $1 + 3 \log_5(x)$       (C)  $4 + \log_5(x)$       (D)  $\log_5(15x)$

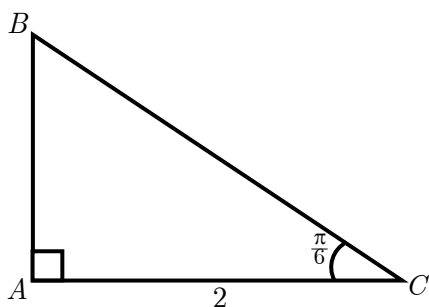
3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função  $h$ , real de variável real. Tal como a figura sugere, as rectas de equações  $x = 0$  e  $y = 3$  são assíntotas do gráfico da função  $h$ .



Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{e^{-x}}$ ?

- (A)  $+\infty$       (B)  $-\infty$       (C) 0      (D) 3

4. Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$ , rectângulo em  $A$ .



Sabe-se que  $\overline{AC} = 2$  e que a amplitude do ângulo  $ABC$  é igual a  $\frac{\pi}{6}$ .

Qual é o valor da área do triângulo  $[ABC]$ ?

- (A)  $\sqrt{3}$       (B)  $2\sqrt{3}$       (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       (D)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  é

$x_i$	0	2	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	$a$

( $a$  designa um número real)

Indique o valor médio da variável  $X$ .

- (A) 1,9                      (B) 2,2                      (C) 2,9                      (D) 3,2

6. Lança-se dez vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de, nos dez lançamentos, sair «face 1» exactamente três vezes?

- (A)  ${}^{10}C_7 \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$                       (B)  $3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$
- (C)  ${}^{10}C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$                       (D)  $\frac{3}{{}^{10}C_3}$

7. Considere o número complexo  $z = a + bi$ , em que  $a > 0$  e  $b < 0$ .

Dos seguintes números, qual é o que pode representar o número complexo **simétrico** de  $z$ ?

- (A)  $3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{8}$                       (B)  $3 \operatorname{cis} \frac{15\pi}{8}$                       (C)  $3 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8}$                       (D)  $3 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{8}$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere  $z = -2 + 3i$ 
  - 1.1. Sejam  $x$  e  $y$  números reais tais que  $w = x + 6 + 2i + yi$ .  
**Sem usar a calculadora**, determine os valores de  $x$  e de  $y$  de modo que  $w = \frac{z}{i}$ .
  - 1.2. Considere agora, no plano complexo, os pontos  $A$  e  $B$ , imagens geométricas dos complexos  $z$  e  $\bar{z}$ , respectivamente.  
**Represente** o triângulo  $[ABO]$  no plano complexo e **calcule** a sua área.

2. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

**Sem recorrer à calculadora** (excepto para eventuais cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

- 2.1. Mostre que a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .
  - 2.2. Prove, usando o teorema de Bolzano, que a equação  $f(x) = 3$  tem pelo menos uma solução em  $]0, 4[$ .
  - 2.3. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa 1.
3. Sejam  $g$  uma função real e  $g'$  a sua derivada, ambas de domínio  $\mathbb{R}^+$ , e tais que  $g'(x) = 2x \ln x + x$   
Usando processos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.
    - 3.1. Justifique que o gráfico de  $g'$  não admite assíntotas oblíquas.
    - 3.2. Verifique que  $g''(x) = 2 \ln x + 3$  e estude  $g$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4. Suponha que o número aproximado de clientes numa certa loja varia segundo o seguinte modelo:

$$c(t) = 25 + 15 \operatorname{sen}(0,4t), \quad t \leq 10$$

Sabe-se que:

- $t$  é medido em horas e o instante  $t = 0$  corresponde ao número de clientes às 10 horas da manhã;
- O argumento da função seno vem em radianos.

- 4.1. Segundo este modelo, quantos clientes havia, aproximadamente, às 9 horas da manhã?

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 4.2. Durante algum tempo depois das 10 horas da manhã, o número de clientes da loja foi superior a 35 .

**Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, calcule esse tempo.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, paus, copas e ouros. Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

- 5.1. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e **sem reposição**, seis cartas. De quantas maneiras se pode fazer a extracção se as quatro primeiras forem ases?

- 5.2. Retiram-se, agora, simultaneamente, quatro cartas de um baralho completo. Qual é a probabilidade de, nessas quatro cartas, haver três figuras? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

- 5.3. Considere o seguinte problema:

*Dados quatro baralhos completos iguais, retiram-se, ao acaso, uma carta de cada baralho. Qual é a probabilidade de haver ou só cartas de espadas ou só figuras?*

Uma resposta correcta para este problema é  $\frac{13^4 + 12^4}{52^4}$

Numa pequena composição, explique porquê.

A sua composição deve incluir:

- uma referência à Regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

**FIM**

## COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa .....	9
Cada resposta errada .....	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0
<b>Grupo II</b> .....	<b>137</b>
<b>1.</b> .....	<b>21</b>
<b>1.1.</b> .....	<b>13</b>
<b>1.2.</b> .....	<b>8</b>
<b>2.</b> .....	<b>36</b>
<b>2.1.</b> .....	<b>12</b>
<b>2.2.</b> .....	<b>12</b>
<b>2.3.</b> .....	<b>12</b>
<b>3.</b> .....	<b>24</b>
<b>3.1.</b> .....	<b>10</b>
<b>3.2.</b> .....	<b>14</b>
<b>4.</b> .....	<b>24</b>
<b>4.1.</b> .....	<b>10</b>
<b>4.2.</b> .....	<b>14</b>
<b>5.</b> .....	<b>32</b>
<b>5.1.</b> .....	<b>8</b>
<b>5.2.</b> .....	<b>12</b>
<b>5.3.</b> .....	<b>12</b>
<b>TOTAL</b> .....	<b>200</b>