EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2008

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 2

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de doze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\ r$ $\quad (\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ $\quad (\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\ cis\ \theta)^n = \rho^n cis(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\ cis\ \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

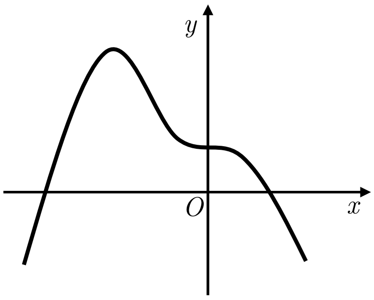
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

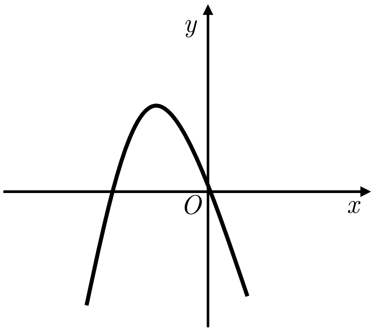
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

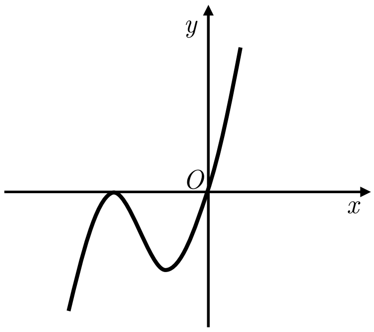


Qual das seguintes pode ser a representação gráfica da função f', **primeira derivada** de f ?

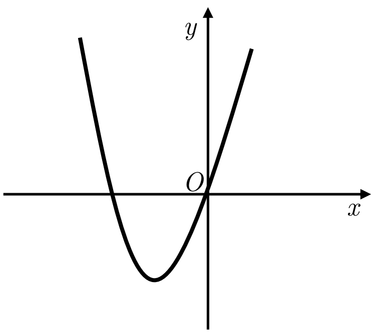
(A)



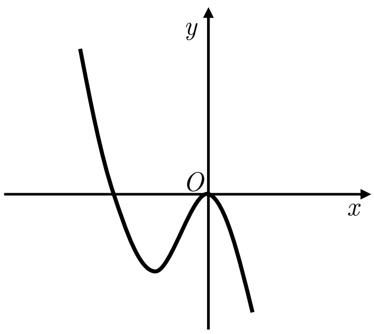
(B)



(C)



(D)

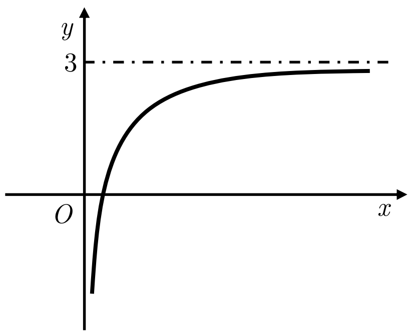


2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \log_5\left(5x^3\right)$.

Qual das seguintes expressões pode também definir a função g?

(A) $1 + 3\log_5(x)$ **(B)** $3\log_5(5x)$ **(C)** $4 + \log_5(x)$ **(D)** $\log_5(15x)$

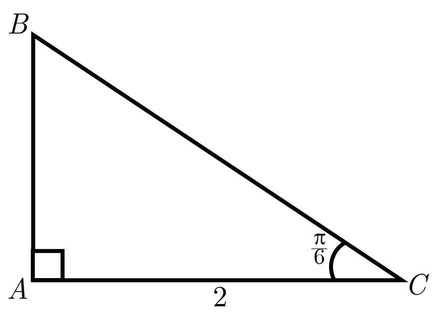
3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função h, real de variável real. Tal como a figura sugere, as rectas de equações $x = 0$ e $y = 3$ são assimptotas do gráfico da função h.



Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{e^{-x}}$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 3

4. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$, rectângulo em A.



Sabe-se que $\overline{AC} = 2$ e que a amplitude do ângulo ABC é igual a $\frac{\pi}{6}$.

Qual é o valor da área do triângulo $[ABC]$?

(A) $2\sqrt{3}$ **(B)** $\sqrt{3}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Lança-se dez vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
Qual é a probabilidade de, nos dez lançamentos, sair «face 1» exactamente três vezes?

(A) ${}^{10}C_7 \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$

(B) $3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$

(C) ${}^{10}C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

(D) $\frac{3}{{}^{10}C_3}$

6. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	2	4
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$0{,}1$	$0{,}2$	a

(a designa um número real)

Indique o valor médio da variável X .

(A) $1{,}9$ **(B)** $2{,}2$ **(C)** $2{,}9$ **(D)** $3{,}2$

7. Considere o número complexo $z = a + b\,i$, em que $a > 0$ e $b < 0$.

Dos seguintes números, qual é o que pode representar o número complexo **simétrico** de z ?

(A) $3\,\mathrm{cis}\,\frac{3\pi}{8}$ **(B)** $3\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{8}$ **(C)** $3\,\mathrm{cis}\,\frac{9\pi}{8}$ **(D)** $3\,\mathrm{cis}\,\frac{15\pi}{8}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -2 + 3\,i$

1.1. Sejam x e y números reais tais que $w = x + 6 + 2\,i + y\,i$.

Sem usar a calculadora, determine os valores de x e de y de modo que $w = \frac{z}{i}$.

1.2. Considere agora, no plano complexo, os pontos A e B, imagens geométricas dos complexos z e $\overline{z}$, respectivamente.
Represente o triângulo $[ABO]$ no plano complexo e **calcule** a sua área.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora (excepto para eventuais cálculos numéricos), resolva as três alíneas seguintes.

2.1. Mostre que a função f é contínua em $x = 0$.

2.2. Prove, usando o teorema de Bolzano, que a equação $f(x) = 3$ tem pelo menos uma solução em $]0, 4[$.

2.3. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

3. Sejam g uma função real e g' a sua derivada, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$, e tais que $g'(x) = 2x \ln x + x$

Usando processos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

3.1. Justifique que o gráfico de g' não admite assimptotas oblíquas.

3.2. Verifique que $g''(x) = 2 \ln x + 3$ e estude g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

4. Suponha que o número aproximado de clientes numa certa loja varia segundo o seguinte modelo:

$$c(t) = 25 + 15\,\mathrm{sen}(0,4\,t)\,, \quad t \leq 10$$

Sabe-se que:

- t é medido em horas e o instante $t = 0$ corresponde ao número de clientes às 10 horas da manhã;
- O argumento da função seno vem em radianos.

4.1. Segundo este modelo, quantos clientes havia, aproximadamente, às 9 horas da manhã?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.2. Durante algum tempo depois das 10 horas da manhã, o número de clientes da loja foi superior a 35.
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, calcule esse tempo.
Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, paus, copas e ouros. Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

5.1. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e **sem reposição**, seis cartas.
De quantas maneiras se pode fazer a extracção se as quatro primeiras forem ases?

5.2. Retiram-se, agora, simultaneamente, quatro cartas de um baralho completo. Qual é a probabilidade de, nessas quatro cartas, haver três figuras? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

5.3. Considere o seguinte problema:

Dados quatro baralhos completos iguais, retiram-se, ao acaso, uma carta de cada baralho.
Qual é a probabilidade de haver ou só cartas de espadas ou só figuras?

Uma resposta correcta para este problema é $\frac{13^4+12^4}{52^4}$

Numa pequena composição, explique porquê.
A sua composição deve incluir:

- uma referência à Regra de Laplace;
- uma explicação do número de casos possíveis;
- uma explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada.. 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 13
1.2. 8

2. 36
2.1. 12
2.2. 12
2.3. 12

3. 24
3.1. 10
3.2. 14

4. 24
4.1. 10
4.2. 14

5. 32
5.1. 8
5.2. 12
5.3. 12

TOTAL **200**