Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE

A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

www.esaas.com

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de doze.

V.S.F.F.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\ r$ $\quad(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ $\quad(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$

$(r$ – *raio da base*; g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$

$(r$ – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad(r$ – *raio*$)$

Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Complexos

$$(\rho\ cis\ \theta)^n = \rho^n cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\ cis\ \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$$

$$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

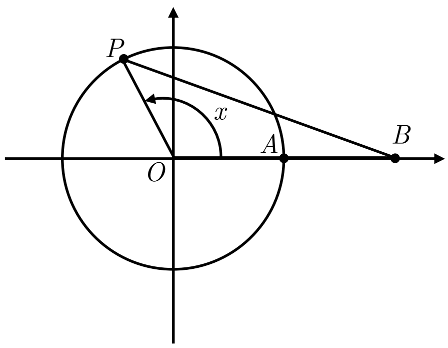
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico.

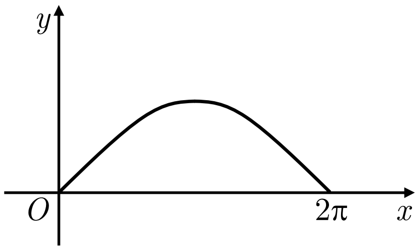


Considere que um ponto P parte de $A(1,0)$ e se desloca sobre uma circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$ $\left(x \in [0, 2\pi]\right)$.

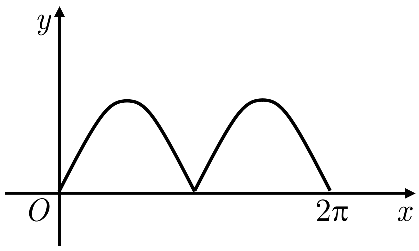
Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância do ponto P ao ponto B.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função g ?

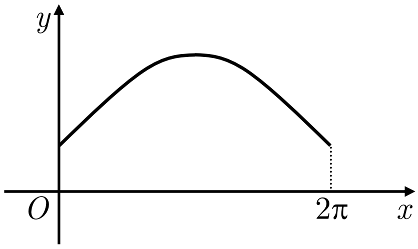
(A)



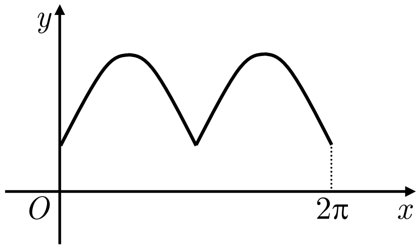
(B)



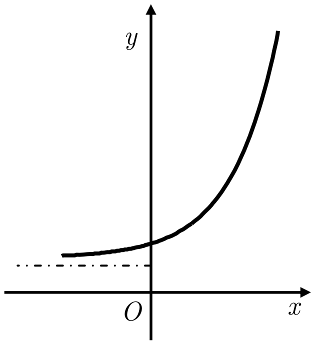
(C)



(D)



2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de $f\,'$, função derivada de f.



Sabe-se ainda que $f(1) = 3$. Qual pode ser o valor de $f(0)$?

(A) 1 **(B)** 3

(C) 5 **(D)** 7

3. Sabe-se que $\log_3 a = \frac{5}{2}$.

Qual é o valor de $\log_3\left(\frac{a^2}{3}\right)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Para um certo valor de k, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - k & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) -4 **(B)** -3 **(C)** -2 **(D)** -1

5. Três raparigas e três rapazes sentam-se em seis cadeiras dispostas lado a lado num cinema.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes nos extremos, um em cada extremo?

(A) 24 **(B)** 36 **(C)** 72 **(D)** 144

6. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

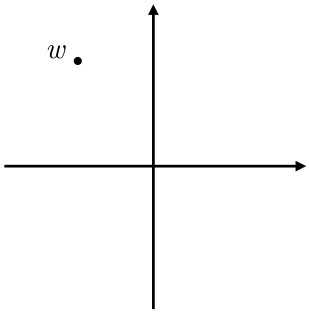
x_i	1	2	3
$\mathrm{P}(X = x_i)$	a	$2a$	$3a$

(a designa um número real)

Indique o valor de a .

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

7. Na figura está representada, no plano complexo, a imagem geométrica do número complexo w.



Qual é o número complexo que pode ser igual a $\overline{w}$?

(A) $1+\sqrt{2}\,i$ **(B)** $-1+\sqrt{2}\,i$ **(C)** $-1-\sqrt{2}\,i$ **(D)** $1-\sqrt{2}\,i$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. **Sem usar a calculadora**, determine o valor de $\frac{i+\left(cis\frac{\pi}{3}\right)^6}{-2+2i}$ apresentando o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Seja A a região do plano complexo definida pela condição

$$1 \leq |z| \leq 2 \quad \wedge \quad Im(z) \leq 0$$

Represente graficamente A e determine a sua **área**.

2. O Dino e a Custódia compraram vários discos compactos de categorias diferentes, a saber:

	Clássica	Jazz	Pop
Dino	2	5	3
Custódia	3	3	7

2.1. Escolhem-se dois discos comprados ao acaso.
Qual é a probabilidade de serem ambos de musica Jazz?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Escolhe-se um disco comprado ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o disco é de musica clássica»;

B: «o disco é do Dino».

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B \mid A)$.
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: no caso de utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explicite os valores das duas probabilidades envolvidas nessa fórmula.

3. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de S ($A \subset S$ e $B \subset S$) e tal que $P(B \mid A) > 0$.
Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis
- $P(A) = 0,3$
- $P(A \cup B) = 0,51$

Prove que A e B são acontecimentos independentes.

4. Seja g a função, **de domínio** $]0{,}2\pi[$, definida por $g(x) = \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$

4.1. **Sem recorrer à calculadora**, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função g .

4.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a recta r, de equação $y = 1$.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize, na janela $[0{,}4] \times [0{,}3]$, o gráfico da função g e a recta r .

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial e ambos os gráficos, visualizados na calculadora.

Assinale ainda os pontos A e B, em que:

- A é o ponto do gráfico de g de abcissa $\frac{\pi}{2}$
- B é o ponto de intersecção entre o gráfico de g e a recta r

Determine o comprimento do segmento $[AB]$, apresentando o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. A Antonieta comprou uma bebida gelada. Admita que, t minutos após a bebida ser servida, a sua temperatura (em graus Celsius) é dada por

$$f(t) = 18 - 16e^{kt} \quad \text{, sendo} \quad t \in [0, +\infty[\quad \text{e} \quad k \neq 0$$

5.1. Nas duas alíneas seguintes, considere $k = -0{,}1$.

5.1.1. Suponha que a bebida da Antonieta foi servida às 13 horas.
Qual deveria ser a sua temperatura às 13 horas e um quarto?
Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.

Nota: se usar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

5.1.2. Na sala onde a Antonieta esteve a beber, a temperatura ambiente é constante.
Usando processos analíticos, calcule-a e interprete o valor obtido no contexto do problema.

5.2. Suponha agora que, após meia hora, a temperatura da bebida da Antonieta é igual a 17 graus Celsius.
Nestas condições, **sem recorrer à calculadora**, determine o valor de k , apresentado o resultado arredondado às centésimas.

Nota: se usar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

6. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

- $f(1) = -1$;
- a sua **derivada**, $f\,'$, é definida por $f'(x) = 2x + \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Usando processos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

6.1. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

6.2. Mostre que o gráfico de f **não tem** pontos de inflexão.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada...................................0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 12
1.2. 9

2. 21
2.1. 10
2.2. 11

3. 11

4. 26
4.1. 13
4.2. 13

5. 34
5.1. 20
5.1.1. 8
5.1.1. 12
5.2. 14

6. 24
6.1. 12
6.2. 12

TOTAL **200**