# EXAME DO ENSINO SECUNDÁRIO A NÍVEL DE ESCOLA
# EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais**

**Duração da prova: 150 minutos**
**2007** **1.ª FASE**

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

# VERSÃO 1

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.**

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 9.

A prova inclui um formulário (pág. 11)

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

## Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

**1.** Uma caixa contém bolas brancas e bolas pretas.

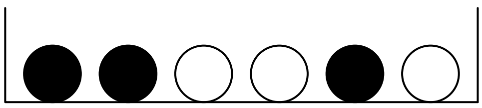
Tira-se da caixa, ao acaso, uma bola e verifica-se de que cor é. Se for branca, não é retirada mais nenhuma bola da caixa. Se for preta, retira-se, sem repor a primeira bola, uma segunda bola da caixa. Vai-se procedendo desta forma, até sair uma bola branca da caixa.

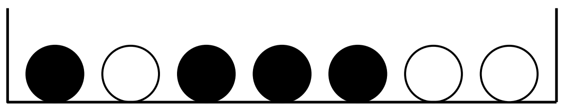
Seja $X$ a variável aleatória *"número de bolas tiradas da caixa até sair bola branca"*.

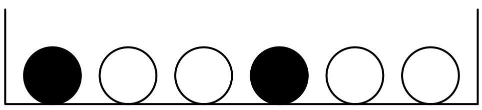
Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória $X$ é

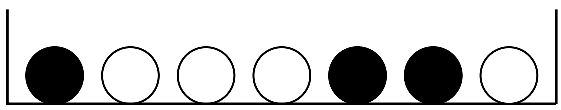
| $x_i$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

Qual das figuras seguintes representa a caixa com as bolas?

**(A)** 

**(B)** 

**(C)** 

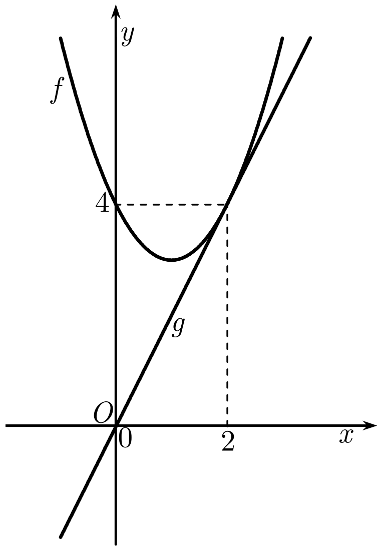
**(D)** 

**2.** Dos vinte alunos que estão numa sala a realizar um exame de Matemática, catorze utilizam uma calculadora da marca *CASIO* e os outros seis, uma da marca *TEXAS*.

Escolhidos, ao acaso, três dos vinte alunos que estão a realizar o exame, qual a probabilidade destes estarem a usar calculadoras todas da mesma marca?

**(A)** $\frac{1}{57}$ **(B)** $\frac{91}{285}$ **(C)** $\frac{32}{95}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

**3.** Na figura ao lado estão representadas:




- parte do gráfico de uma função quadrática $f$.
- parte do gráfico de uma função afim $g$.

A recta que é gráfico da função $g$, é tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de coordenadas $(2,4)$ e passa pela origem do referencial.

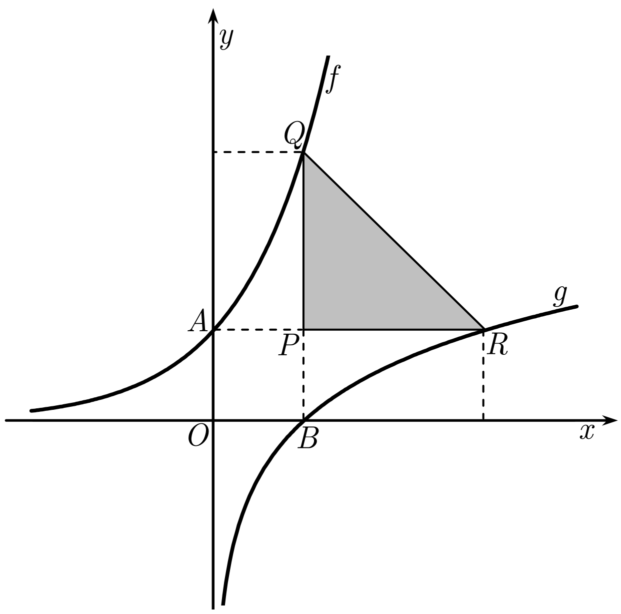
Seja $h$ a função definida por $h(x) = f(x) \times g(x)$.

Qual é o valor de $h'(2)$?

**(A)** $2$ **(B)** $4$ **(C)** $8$ **(D)** $16$

**4.** Na figura estão representadas graficamente duas funções:

- a função $f$, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 3^x$
- a função $g$, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \log_3 x$




O ponto $A$ pertence ao gráfico de $f$ e ao eixo das ordenadas; o ponto $B$ pertence ao gráfico de $g$ e ao eixo das abcissas.

O ponto $R$ pertence ao gráfico de $g$ e tem ordenada igual à do ponto $A$.

O ponto $Q$ pertence ao gráfico de $f$ e tem abcissa igual à do ponto $B$.

O ponto $P$ é o ponto de intersecção das rectas $AR$ e $BQ$.

Qual é a área do triângulo $[PQR]$?

**(A)** $2$ **(B)** $4$ **(C)** $\frac{9}{2}$ **(D)** $9$

**V.S.F.F.**

**5.** Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$ ?

**(A)** $0$ **(B)** $1$ **(C)** $\dfrac{\pi}{2}$ **(D)** $+\infty$

**6.** Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\dfrac{e^x + 1}{1 - \ln x} > 0$

**(A)** $]0, e[$ **(B)** $]-\infty, e[$ **(C)** $[0, 1[$ **(D)** $]e, +\infty[$

**7.** Seja $z$ um número complexo diferente de zero.

Sabendo que $\arg z = \pi$ , qual das seguintes afirmações é **falsa**?

**(A)** $\mathrm{Re}(z) < 0$ **(B)** $\mathrm{Im}\left(z^2\right) > 0$ **(C)** $z = \overline{z}$ **(D)** $\arg(-z) = 0$

# Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

**1.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2}$

**1.1.** **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{2 - i}$, apresentando o resultado final na forma algébrica.

**1.2.** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = -z_2$.

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

**2.** Dos $120$ alunos que terminaram no último ano lectivo, um curso de engenharia numa universidade, sabe-se que:

- $45\%$ são do sexo feminino.
- a quarta parte do total estão actualmente desempregados.
- considerando apenas os que têm emprego, $3$ em cada $5$ são do sexo masculino.

**2.1.** Escolhido, ao acaso, um dos alunos que terminaram o curso, determine a probabilidade de:

**2.1.1.** ser um rapaz desempregado. Apresente o resultado em percentagem.

**2.1.2.** estar empregado sabendo que é uma rapariga. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**2.2.** $8$ dos jovens desempregados, $5$ rapazes e $3$ raparigas concorrem a uma vaga para um emprego numa empresa. Entre outras provas, os jovens serão entrevistados individualmente por um dos administradores. Supondo que a ordem das entrevistas é aleatória, determine a probabilidade dos $5$ rapazes serem os últimos a serem entrevistados.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

**3.** Considere a função $f$, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

**Sem recorrer à calculadora,** resolva as duas alíneas seguintes.

**3.1.** Estude a função $f$ quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

**3.2.** Mostre que $f'(x) = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$ e estude a função quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

**V.S.F.F.**

**4.** Considere a função $g$, de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $g(x)=2x-\ln(x+1)$

**4.1.** Aplicando a definição de derivada, determine $g'(0)$ e escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $0$.

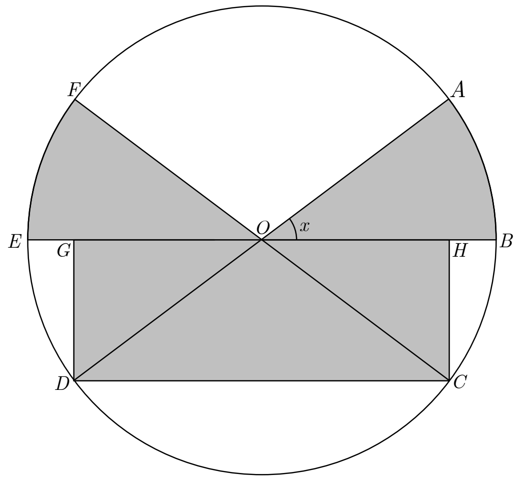
**4.2.** Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $g(x)=2$ tem, no intervalo $]0,3[$, pelo menos uma solução.

**4.3.** Determine $g''(x)$ e, a partir do resultado obtido, conclua que o gráfico de $g$ não tem pontos de inflexão.

**5.** Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto $O$ e raio $1.$

Sabe-se que:

- Os arcos $AB$, $BC$, $DE$ e $EF$ têm a mesma amplitude.
- $[CDGH]$ é um rectângulo.
- $x$ designa a amplitude em radianos, do ângulo $AOB$ $\left(x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$




**5.1.** Prove que a área da região sombreada é dada, em função de $x$, por: $A(x)=x+\operatorname{sen}(2x)$

**5.2.** Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o resultado obtido, referindo a figura obtida.

**5.3.** Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual é o valor de $x$ para o qual a área da região sombreada é igual à terça parte da área do círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

**FIM**

## COTAÇÕES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Grupo I** | | | | **63** |
| Cada resposta certa | | | 9 | |
| Cada resposta errada | | | 0 | |
| Cada questão não respondida ou anulada | | | 0 | |
| **Grupo II** | | | | **137** |
| **1.** | | | 21 | |
| **1.1.** | | 12 | | |
| **1.2.** | | 9 | | |
| **2.** | | | 32 | |
| **2.1.** | | 22 | | |
| **2.1.1.** | 11 | | | |
| **2.1.2.** | 11 | | | |
| **2.2.** | | 10 | | |
| **3.** | | | 23 | |
| **3.1.** | | 10 | | |
| **3.2.** | | 13 | | |
| **4.** | | | 35 | |
| **4.1.** | | 13 | | |
| **4.2.** | | 10 | | |
| **4.3.** | | 12 | | |
| **5.** | | | 26 | |
| **5.1.** | | 10 | | |
| **5.2.** | | 6 | | |
| **5.3.** | | 10 | | |
| **TOTAL** | | | | **200** |

**V.S.F.F.**

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

# Formulário

## Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r \quad (\alpha$ — *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* $r$ — *raio*$)$

## Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha$ — *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* $r$ — *raio*$)$

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

$(r$ – *raio da base;* $g$ – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

$(r$ – *raio*$)$

## Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3 \qquad (r$ – *raio*$)$

## Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

## Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

## Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n.u^{n-1}.u' \qquad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$$

$$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'.e^u$$

$$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$$

**V.S.F.F.**

# PROVA 535

VERSÃO 1

# EXAME DO ENSINO SECUNDÁRIO A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais**

**Duração da prova: 150 minutos**
**2007** **1.ª FASE**

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

# VERSÃO 2

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.**

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 9.

A prova inclui um formulário (pág. 11)

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

# Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

**1.** Uma caixa contém bolas brancas e bolas pretas.

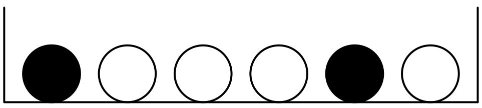
Tira-se da caixa, ao acaso, uma bola e verifica-se de que cor é. Se for branca, não é retirada mais nenhuma bola da caixa. Se for preta, retira-se, sem repor a primeira bola, uma segunda bola da caixa. Vai-se procedendo desta forma, até sair uma bola branca da caixa.

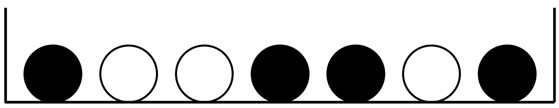
Seja $X$ a variável aleatória *“número de bolas tiradas da caixa até sair bola branca”*.

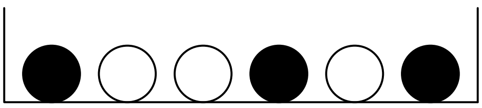
Sabe-se que a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória $X$ é

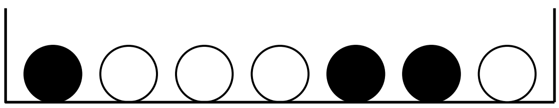
| $x_i$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

Qual das figuras seguintes representa a caixa com as bolas?

**(A)** 

**(B)** 

**(C)** 

**(D)** 

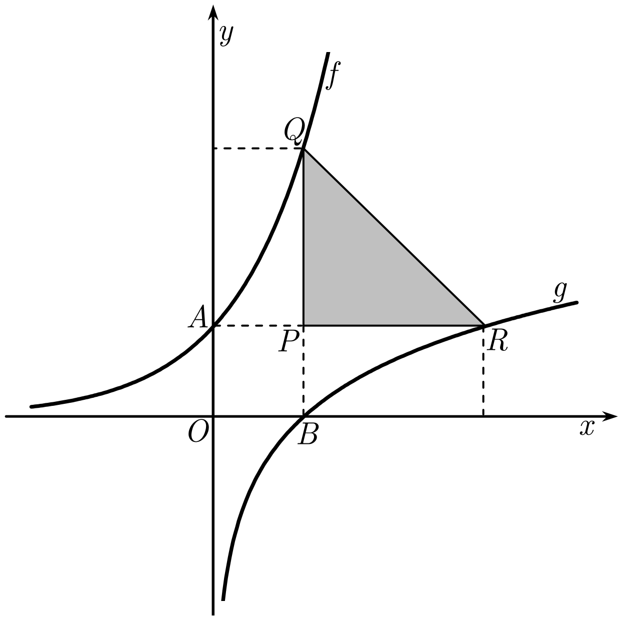
**2.** Dos vinte alunos que estão numa sala a realizar um exame de Matemática, catorze utilizam uma calculadora da marca *CASIO* e os outros seis, uma da marca *TEXAS*.

Escolhidos, ao acaso, três dos vinte alunos que estão a realizar o exame, qual a probabilidade destes estarem a usar calculadoras todas da mesma marca?

**(A)** $\frac{1}{57}$ **(B)** $\frac{5}{7}$ **(C)** $\frac{91}{285}$ **(D)** $\frac{32}{95}$

**3.** Na figura estão representadas graficamente duas funções:

- a função $f$, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 3^x$
- a função $g$, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \log_3 x$




O ponto $A$ pertence ao gráfico de $f$ e ao eixo das ordenadas; o ponto $B$ pertence ao gráfico de $g$ e ao eixo das abcissas.

O ponto $R$ pertence ao gráfico de $g$ e tem ordenada igual à do ponto $A$.

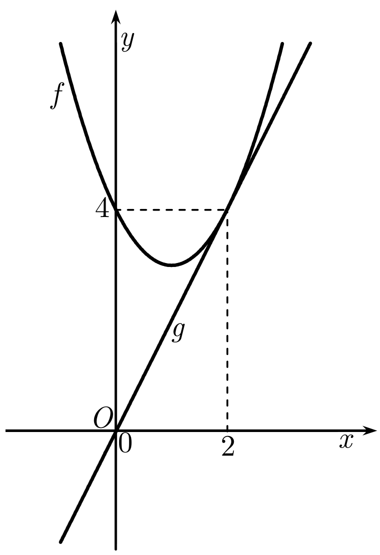
O ponto $Q$ pertence ao gráfico de $f$ e tem abcissa igual à do ponto $B$.

O ponto $P$ é o ponto de intersecção das rectas $AR$ e $BQ$.

Qual é a área do triângulo $[PQR]$?

**(A)** $4$ **(B)** $2$ **(C)** $\frac{9}{2}$ **(D)** $9$

**4.** Na figura ao lado estão representadas:




- parte do gráfico de uma função quadrática $f$.
- parte do gráfico de uma função afim $g$.

A recta que é gráfico da função $g$, é tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de coordenadas $(2,4)$ e passa pela origem do referencial.

Seja $h$ a função definida por $h(x) = f(x) \times g(x)$.

Qual é o valor de $h'(2)$?

**(A)** $4$ **(B)** $2$ **(C)** $16$ **(D)** $8$

**5.** Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\dfrac{e^x+1}{1-\ln x} > 0$

**(A)** $[0,1[$  **(B)** $]-\infty, e[$  **(C)** $]0, e[$  **(D)** $]e, +\infty[$

**6.** Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{x}$ ?

**(A)** $0$  **(B)** $+\infty$  **(C)** $\dfrac{\pi}{2}$  **(D)** $1$

**7.** Seja $z$ um número complexo diferente de zero.

Sabendo que $\arg z = \pi$ , qual das seguintes afirmações é **falsa**?

**(A)** $\operatorname{Im}\left(z^2\right) > 0$  **(B)** $\arg(-z) = 0$  **(C)** $z = \overline{z}$  **(D)** $\operatorname{Re}(z) < 0$

## Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

**1.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{2}$

**1.1.** **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{2 - i}$, apresentando o resultado final na forma algébrica.

**1.2.** Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = -z_2$.

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

**2.** Dos $120$ alunos que terminaram no último ano lectivo, um curso de engenharia numa universidade, sabe-se que:

- $45\%$ são do sexo feminino.
- a quarta parte do total estão actualmente desempregados.
- considerando apenas os que têm emprego, $3$ em cada $5$ são do sexo masculino.

**2.1.** Escolhido, ao acaso, um dos alunos que terminaram o curso, determine a probabilidade de:

**2.1.1.** ser um rapaz desempregado. Apresente o resultado em percentagem.

**2.1.2.** estar empregado sabendo que é uma rapariga. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**2.2.** $8$ dos jovens desempregados, $5$ rapazes e $3$ raparigas concorrem a uma vaga para um emprego numa empresa. Entre outras provas, os jovens serão entrevistados individualmente por um dos administradores. Supondo que a ordem das entrevistas é aleatória, determine a probabilidade dos $5$ rapazes serem os últimos a serem entrevistados.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

**3.** Considere a função $f$, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

**Sem recorrer à calculadora,** resolva as duas alíneas seguintes.

**3.1.** Estude a função $f$ quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

**3.2.** Mostre que $f'(x) = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$ e estude a função quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

**V.S.F.F.**

**4.** Considere a função $g$, de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $g(x)=2x-\ln(x+1)$

**4.1.** Aplicando a definição de derivada, determine $g'(0)$ e escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa $0$.

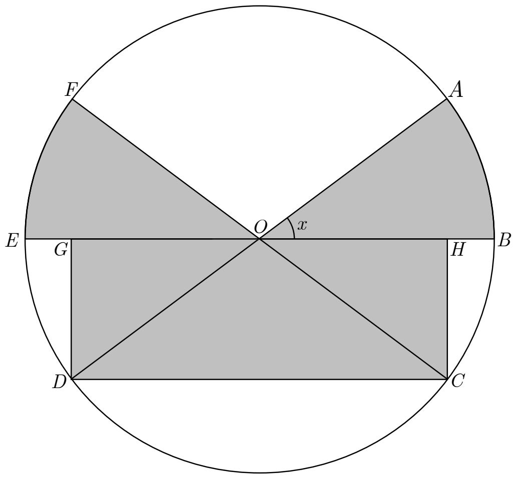
**4.2.** Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $g(x)=2$ tem, no intervalo $]0,3[$, pelo menos uma solução.

**4.3.** Determine $g''(x)$ e, a partir do resultado obtido, conclua que o gráfico de $g$ não tem pontos de inflexão.

**5.** Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto $O$ e raio $1$.

Sabe-se que:

- Os arcos $AB$, $BC$, $DE$ e $EF$ têm a mesma amplitude.
- $[CDGH]$ é um rectângulo.
- $x$ designa a amplitude em radianos, do ângulo $AOB$ $\left(x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$




**5.1.** Prove que a área da região sombreada é dada, em função de $x$, por: $A(x)=x+\operatorname{sen}(2x)$

**5.2.** Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o resultado obtido, referindo a figura obtida.

**5.3.** Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual é o valor de $x$ para o qual a área da região sombreada é igual à terça parte da área do círculo?*

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

**FIM**

## COTAÇÕES

| | | |
|---|---|---|
| **Grupo I** | | **63** |
| Cada resposta certa | | 9 |
| Cada resposta errada | | 0 |
| Cada questão não respondida ou anulada | | 0 |
| **Grupo II** | | **137** |
| **1.** | | 21 |
| **1.1.** | 12 | |
| **1.2.** | 9 | |
| **2.** | | 32 |
| **2.1.** | 22 | |
| **2.1.1.** | 11 | |
| **2.1.2.** | 11 | |
| **2.2.** | 10 | |
| **3.** | | 23 |
| **3.1.** | 10 | |
| **3.2.** | 13 | |
| **4.** | | 35 |
| **4.1.** | 13 | |
| **4.2.** | 10 | |
| **4.3.** | 12 | |
| **5.** | | 26 |
| **5.1.** | 10 | |
| **5.2.** | 6 | |
| **5.3.** | 10 | |
| **TOTAL** | | **200** |

**V.S.F.F.**

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

# Formulário

## Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$ $\quad$ ($\alpha$ *— amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* $r$ *— raio*)

## Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior\ +\ Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ *— amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* $r$ *— raio*)

## Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

($r$ *– raio da base;* $g$ *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

($r$ *– raio*)

## Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad$ ($r$ *– raio*)

## Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

## Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \{0, \ldots, n-1\}$$

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

## Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u.v)' = u'.v + u.v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n.u^{n-1}.u' \qquad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$$

$$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'.e^u$$

$$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

## Limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$$

# PROVA 535

## VERSÃO 2

# EXAME DO ENSINO SECUNDÁRIO A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**
**Cursos Gerais**

**Duração da prova: 150 minutos**
**2007** **1.ª FASE**

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

## COTAÇÕES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Grupo I** | | | | **63** |
| Cada resposta certa | | | 9 | |
| Cada resposta errada | | | 0 | |
| Cada questão não respondida ou anulada | | | 0 | |
| **Grupo II** | | | | **137** |
| **1.** | | | 21 | |
| **1.1.** | | 12 | | |
| **1.2.** | | 9 | | |
| **2.** | | | 32 | |
| **2.1.** | | 22 | | |
| **2.1.1.** | 11 | | | |
| **2.1.2.** | 11 | | | |
| **2.2.** | | 10 | | |
| **3.** | | | 23 | |
| **3.1.** | | 10 | | |
| **3.2.** | | 13 | | |
| **4.** | | | 35 | |
| **4.1.** | | 13 | | |
| **4.2.** | | 10 | | |
| **4.3.** | | 12 | | |
| **5.** | | | 26 | |
| **5.1.** | | 10 | | |
| **5.2.** | | 6 | | |
| **5.3.** | | 10 | | |
| **TOTAL** | | | | **200** |

**V.S.F.F.**

# CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

## Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

| **Questões** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Versão 1** | A | C | D | A | D | A | B |
| **Versão 2** | C | D | B | C | C | B | A |

## Grupo II

### Critérios gerais

**1.** Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

**2.** Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

**3.** As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.

**4.** Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.

**5.** Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo.
Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

**6.** A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

**6.1.** Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

**6.2.** O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

**6.3.** Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

**6.4.** No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

**6.5.** Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

**6.6.** Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

**7.** Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

**8.** O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

**9.** O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

**10.** Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

**11.** Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado ..................................................................... –1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ................................................................. –1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução ............................................................... –2 pontos

## Critérios específicos

**1.1.** ........................................................................................................................ **12**

- Cálculo do numerador ........................................................................................ 6
- Divisão ........................................................................................................ 5
- Resultado na forma $a + bi$ .............................................................................. 1

**1.2.** ........................................................................................................................ **9**

- Resolução da equação ........................................................................................ 7
- Escrita das soluções na forma trigonométrica ............................................................ 2

**2.1.1.** ........................................................................................................................ **11**

- Probabilidade pedida ........................................................................................ 10
- Resultado final ........................................................................................................ 1

**2.1.2.** ........................................................................................................................ **11**

- Probabilidade pedida ........................................................................................ 10
- Resultado final ........................................................................................................ 1

**2.2.** ........................................................................................................................ **10**

- Expressão que dá a probabilidade pedida ................................................................ 8
- Resultado final ........................................................................................................ 2

**3.1.** ........................................................................................................................ **10**

- Provar que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de $f$ ............. 5
- Provar que não existe assimptota não vertical do gráfico de $f$ quando $x \to -\infty$ ........ 5

**3.2.** ........................................................................................................................ **13**

- Determinar $f'(x)$ ........................................................................................ 4
- Determinar o zero de $f'$ ........................................................................................ 3
- Estudar o sinal de $f'$ ........................................................................................ 3
- Conclusão ........................................................................................................ 3

**4.1.** ........................................................................................................................................................ **13**

- Identificação de $g'(0)$ com $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \ln(x+1)}{x}$ ........................................................ 3
- Cálculo do limite ........................................................................................................ 5
- Equação da recta tangente no ponto de abcissa $0$ ........................................................ 5

**4.2.** ........................................................................................................................................................ **10**

- Referir que $g$ é contínua no intervalo $[0,3]$ ........................................................ 2
- $g(0)$ ........................................................................................................ 1
- $g(3)$ ........................................................................................................ 2
- Referir que $g(0) < 2 < g(3)$ ........................................................ 2
- Concluir o pretendido, evocando o Teorema de Bolzano ........................................................ 3

**4.3.** ........................................................................................................................................................ **12**

- Cálculo de $g'(x)$ ........................................................................................................ 4
- Cálculo de $g''(x)$ ........................................................................................................ 4
- Referir que $g''(x) > 0, \ \forall x \in \left]-1, +\infty\right[$ ........................................................ 2
- Concluir o pretendido ........................................................................................................ 2

**5.1.** ........................................................................................................................................................ **10**

- Expressão da área dos dois sectores circulares ........................................................ 4
- Expressão da área do rectângulo $[DCHG]$ ........................................................ 5
- Escrita da expressão $A(x)$ ........................................................................................................ 1

**5.2.** ........................................................................................................................................................ **6**

- Cálculo de $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ ........................................................................................................ 2
- Interpretação geométrica ........................................................................................................ 4

**5.3.** ........................................................................................................................................................ **10**

- Equacionar o problema ........................................................................................................ 4
- Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação ........................................ 5
- Apresentação do resultado final com o arredondamento pedido ........................................ 1

**Exames Nacionais do Ensino Secundário 2007** **Grelha de Classificação - Prova 535 - Matemática - 1.ª Fase**

**N.º e Nome Corrector:** **Nº Provas:**

| Código Confidencial da Escola | N.º Convencional da Prova | Versão | Grupo I | | | | | | | Grupo II | | | | | | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **1.1** | **1.2.** | **2.1.1.** | **2.1.2.** | **2.2.** | **3.1.** | **3.2.** | **4.1.** | **4.2.** | **4.3.** | **5.1.** | **5.2.** | **5.3.** | |
| | | | (9) | (9) | (9) | (9) | (9) | (9) | (9) | (12) | (9) | (11) | (11) | (10) | (10) | (13) | (13) | (10) | (12) | (10) | (6) | (10) | (200) |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

O Professor Corrector/Classificador,

____________________________

Classificações homologadas em ___/___/2007
Por delegação da Presidente do JNE,
O Responsável de Agrupamento, ____________________