



[www.esaas.com](http://www.esaas.com)

Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

**EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE  
A EXAME NACIONAL**

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**

**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos**

Duração da prova: 150 minutos

**FASE EXTRAORDINÁRIA**

2007

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

**COTAÇÕES**

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa . . . . .	9
Cada resposta errada . . . . .	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0
 <b>Grupo II</b> .....	 <b>137</b>
<b>1.</b> .....	<b>21</b>
1.1. ....	11
1.2. ....	10
<b>2.</b> .....	<b>32</b>
2.1. ....	10
2.2. ....	12
2.3. ....	10
<b>3.</b> .....	<b>20</b>
3.1. ....	8
3.2. ....	12
<b>4.</b> .....	<b>38</b>
4.1. ....	25
4.1.1. ....	12
4.1.2. ....	13
4.2. ....	13
<b>5.</b> .....	<b>26</b>
5.1. ....	13
5.2. ....	13
 <b>TOTAL</b> .....	 <b>200</b>

# CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

## Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	B	D	C	B	C
Versão 2	B	D	C	A	A	C	A

## Grupo II

### Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
  - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
  - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
    - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
    - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
  - 4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
  - 4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
  - 4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

## Critérios específicos

1.1. ....11

Substituição, na expressão  $\frac{z}{i} - 4i$ , de  $z$  por  $3 + 4i$  .....1

Divisão de  $z$  por  $i$  .....6

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor  
Conveniente ( $-i$  ou  $i$ ); ou decomposição da fracção numa  
soma de fracções.....2

Restantes cálculos.....4

Adição do resultado obtido a  $-4i$  .....4

1.2. ....10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

### 1.º Processo

$z = 5cis\theta$  .....2(1+1)

$\bar{z} = 5cis(-\theta)$  .....3(1+2)

$i \times \bar{z} = 5cis\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$  .....5(1+4)

### Notas:

1. As subdivisões das cotações indicadas entre parêntesis correspondem: a primeira, à escrita do módulo; a segunda, à escrita do argumento.
2. Se o examinando determinar um valor aproximado de  $\theta$ , as cotações máximas a atribuir deverão ser, respectivamente 1 (1+0), 2 (1+1) e 3 (1+2).

2.º Processo

$\bar{z} = 3 - 4i$ .....	1
$i \times \bar{z} = 4 + 3i$ .....	2
$i \times \bar{z} = 5cis\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (ver notas 1 e 2).....	7(1+6)

**Notas:**

1. 1+6 significa: 1 pontos pela escrita do módulo, 6 pontos pela escrita do argumento. Estes 6 pontos podem ser subdivididos em 2+3: 2 pontos pela escrita de  $-\theta$  e 3 pontos pela escrita de  $\frac{\pi}{2}$ .
2. Se o examinando determinar um valor aproximado de um argumento de  $i \times \bar{z}$ , a cotação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser de 2 (1+1) pontos.

**2.1.** ..... **10**

Expressão correcta (ver nota 1).....	9
Número pedido: 486 (ver nota 2).....	1

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação atribuir.

Expressão correcta: $9^2 \times {}^4C_2$ (ou equivalente).....	9
Outras expressões: $9^2$ (ou equivalente).....	5
Outras situações.....	0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

**2.2. ....12**

Expressão que dá a probabilidade (**ver notas 1 e 2**) .....11

Resultado na forma de dízima: 0,4 (**ver nota 3**) .....1

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação atribuir.

Expressão correcta:  $\frac{4 \times 9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$  (ou equivalente).....11

Outras expressões:  $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times 7}$  (ou equivalente).....6

$\frac{4 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4}$  (ou equivalente).....6

$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{10^4}$  (ou equivalente).....3

Outras situações.....0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

**2.3. ....10**

Escrita da equação (se houver  $n$  cartões com números ímpares):  $\frac{12}{n + 11} = \frac{1}{3}$  .....6

Resolução da equação .....3

Resposta: havia 25 cartões com números ímpares .....1

3.1. ....8

Substituir  $h$  por 1,861 (ver nota 1).....6

$P(1,861) = 81$  (ver nota 2).....2

**Notas:**

1. Se o examinando substituir  $h$  por 1861, a sua resposta deverá ser cotada com um máximo de 3 pontos.
2. Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o resultado estiver mal arredondado, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.2. ....12

$$\frac{P(h+10)}{P(h)} = \frac{101e^{-0,12(h+10)}}{101e^{-0,12h}} \dots\dots\dots 1$$

$$\frac{P(h+10)}{P(h)} = e^{-1,2} \dots\dots\dots 6$$

$$\frac{P(h+10)}{P(h)} \approx 0,3 \dots\dots\dots 1$$

Interpretar o resultado (quando se sobe 10 km a partir de qualquer altitude, a pressão passa a ser 0,3 (ou 30%) do que era antes).....4

4.1.1. ....12

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} \dots\dots\dots 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \dots\dots\dots 1$$

Concluir que a recta de equação  $x = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ .....1

Referir que, pelo facto de  $f$  ser contínua em  $\mathbb{R}^+$ , o seu gráfico não tem outras assíntotas verticais.....1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \dots\dots\dots 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = +\infty \dots\dots\dots 3$$

Concluir que a recta de equação  $y = 0$  é assíntota do gráfico de  $f$ .....2

**4.1.2. ....13**

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  (ver nota 1).....4

Determinar o zero da derivada de  $f$  .....3

$f'(x) = 0$  .....1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$  .....2

Constatação de que  $e$  é um maximizante de  $f$  (ver nota 2).....4

Determinar o máximo:  $f(e) = \frac{1}{e}$  .....2

**Notas:**

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a derivada de  $f$ , a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.
2. O examinando pode apresentar um quadro com o estudo do sinal de  $f'$  e conseqüentemente conclusão, relativamente à monotonia de  $f$  e existência de um maximizante. Nesta situação, o quadro deve ser cotado da seguinte maneira:

Primeira linha correcta (domínio, de 0 a  $+\infty$ ).....1

Segunda linha correcta (sinal de  $f'$ ) de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para a derivada de  $f$  .....2

Terceira linha correcta (relação entre o sinal de  $f'$  e a monotonia de  $f$  e existência de um maximizante).....1

**4.2. ....13**

Equacionar o problema:  $f(x) = -1$  .....3

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação (ver nota 1).....6

Abcissa pedida:  $x \approx 0,6$  (ver nota 2).....4

**Notas:**

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando apresenta o gráfico de  $f$  e a recta de equação  $y = -1$  e assinala correctamente o ponto de intersecção (ou apresenta o gráfico da função definida por  $f(x) + 1$  e assinala correctamente o seu zero).....6

O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*, ...) ou de algo que evidencie a procura do referido ponto de intersecção (ou do referido zero) .....3

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora» .....3

2. A escrita da abcissa do ponto de intersecção deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

0,6 ..... 4

0,5 ou 0,7 ..... 3

0,4 ou 0,8 ..... 2

Outros valores ..... 0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo  $[0,56 ; 0,60]$  ..... 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo  $[0,50 ; 0,66]$  ..... 2

Outras situações ..... 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

1 ..... 1

Outros valores ..... 0

**5.1. .... 13**

Calcular  $g(0)$  ..... 2

Calcular  $g(\pi)$  ..... 2

Referir a continuidade de  $g$  em  $]0, \pi[$  ..... 2

Referir que  $g(0)$  e  $g(\pi)$  têm sinais contrários..... 4

Concluir o pretendido, evocando o Teorema de Bolzano (**ver nota 1**) ..... 3

**Notas:**

1. Se o aluno concluir o pretendido, mas não referir que tal conclusão resulta do Teorema de Bolzano (ou do seu corolário), a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 1 ponto.
2. Não se exige que o aluno explicita a equação  $g(x) = 0$ . No entanto, caso o aluno se limite a fazê-lo, deverá ser atribuída à sua resposta a classificação de 2 pontos.

$g'(x) = 3 + \text{sen } x$  .....3

Justificar que  $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  .....4

$3 + \text{sen } x > 0 \Leftrightarrow \text{sen } x > -3$  .....2

$\text{sen } x > -3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  .....2

ou

Referir que  $\text{sen } x \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  .....2

$\text{sen } x \geq -1 \Leftrightarrow g'(x) \geq 2$  .....2

ou

Justificar que  $g'$  não tem zeros.....2

Justificar que  $g'$  não muda de sinal (por exemplo, porque  $g'$  é contínua e não tem zeros).....1

Concluir que  $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (por exemplo, porque  $g'$  não muda de sinal e  $g'(0) > 0$ ).....1

Concluir que  $g$  é estritamente crescente em.....3

Referir que uma função estritamente crescente não pode ter mais do que um zero.....3