

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

2.ª FASE

2009

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa .....	9
Cada resposta errada .....	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0
 <b>Grupo II</b> .....	 <b>137</b>
<b>1.</b> .....	21
1.1. ....	11
1.2. ....	10
<b>2.</b> .....	32
2.1. ....	20
2.2. ....	12
<b>3.</b> .....	20
<b>4.</b> .....	32
4.1. ....	15
4.2. ....	17
<b>5.</b> .....	32
5.1. ....	16
5.2. ....	16
 <b>TOTAL</b> .....	 <b>200</b>

# CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

## Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o aluno dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

<b>Questões</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>Respostas</b>	D	B	B	C	A	C	C

## Grupo II

### Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o aluno se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um aluno utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o aluno deve percorrer para as resolver.
  - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
  - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
    - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
    - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
  - 4.3. No caso de o aluno cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o aluno as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
  - 4.4. Caso o aluno cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo aluno, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
  - 4.5. Pode acontecer que o aluno, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo aluno, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o aluno pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O aluno pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o aluno utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o aluno não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o aluno a uma resolução analítica, sem calculadora, e o aluno a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subseqüentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
8. Tudo o que o aluno escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subseqüentes que dependam do que o aluno escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

## Critérios específicos

### 1.1. ....11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

#### 1.º processo:

$z = 2 - 2i$  .....1

$|z| = \sqrt{8}$  .....2

$Arg(z) = -\frac{\pi}{4}$  (ou equivalente).....2

$2 - 2i = \sqrt{8} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$  (ou equivalente).....1

Escrever  $z^4 = \left(\sqrt{8}\right)^4 \operatorname{cis}\left(-\frac{4\pi}{4}\right)$ .....2

Obter o resultado final:  $z^4 = -64$  .....3

#### 2.º processo:

$z = 2 - 2i$  .....1

$z^2 = -8i$  .....5

Obter o resultado final:  $z^4 = -64$  .....5

### 1.2. ....10

Representar o ponto  $A$  .....2

Representar o ponto  $B$  .....3

Desenhar o triângulo  $[AOB]$ .....1

Concluir que o coeficiente da parte real de  $z$  é 5.....3

Escrever  $z$  na forma algébrica.....1

#### Nota:

Se o aluno não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de que deve representar o triângulo  $[AOB]$ , deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

**2.1.** .....20

Obter, devidamente justificadas, as probabilidades dos acontecimentos.....16

$P(\{0\}) = \frac{5}{9}$  .....4

$P(\{1\}) = \frac{1}{9}$  .....4

$P(\{2\}) = \frac{2}{9}$  .....4

$P(\{4\}) = \frac{1}{9}$  .....4

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades.....4

**2.2.** .....12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

**1.º processo:**

Referir que os acontecimentos  $A$  e  $B$  são independentes.....3

Referir que  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  .....4

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$  .....4

$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$  .....1

**2.º processo:**

$\#\Omega = 9$  .....2

$A = \{(1,0);(1,1);(1,2)\}$  .....3

$B = \{(0,1);(1,1);(2,1);(0,2);(1,2);(2,2)\}$  .....4

$A \cap B = \{(1,1);(1,2)\}$  .....2

$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$  .....1

Conteúdo (ver notas 1, 2 e 3).....18

Forma (ver nota 4).....2

**Notas:**

1. Os motivos de rejeição das opções incorrectas são, por exemplo, os seguintes:

Opção A: a imagem de 0 é 15 (e deveria ser 16), pois, no momento inicial, irá haver 16 lincas.

Opção B: a intenção do Centro é a de que o n.º de lincas aumente indefinidamente, e não que se aproxime dos 40 exemplares (sem nunca ultrapassá-lo).

Opção D: após 5 anos, irá haver (aproximadamente) 17 lincas (e deveria haver 20 ou mais), pois  $L(5) \approx 16,82$ .

2. A explicação do motivo pelo qual é rejeitada cada uma das opções erradas vale 6 pontos, a serem atribuídos de acordo com o seguinte critério:

O motivo apresentado é correcto e está devidamente fundamentado.....6

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está incompleta ou contém imperfeições... ..4

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está errada ou não existe.....2

O motivo apresentado não é correcto.....0

3. Não deverá ser valorizada qualquer explicação sobre as razões pelas quais a opção C está de acordo com a situação a modelar, dado que tal não é pedido no enunciado.

4. Quanto à forma, a composição deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).....2

Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.....1

Ausência de composição ou redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.....0

<b>4.1.</b> .....	<b>15</b>
Escrever a equação $h(x) = 0$ .....	4
Determinar analiticamente as soluções da equação $h(x) = 0$ .....	11
$\ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1$ .....	8
$x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$ .....	2
$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .....	1

---

<b>4.2.</b> .....	<b>17</b>
$h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ (ver nota) .....	6
$h'(1) = 1$ .....	4
$h(1) = \ln 2$ .....	2
Escrever a equação reduzida da recta ( $y = x + b$ ) .....	5
$b = \ln 2 - 1$ .....	2
Escrever a equação reduzida ( $y = x + \ln 2 - 1$ ) .....	3
<b>ou</b>	
Escrever a equação $y - h(1) = h'(1)(x - 1)$ .....	2
Escrever a equação reduzida ( $y = x + \ln 2 - 1$ ) .....	3

**Nota:**

Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

**5.1.** ..... **16**

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \times \frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} \dots\dots\dots 1$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \dots\dots\dots 10$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 5$$

**5.2.** ..... **16**

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \dots\dots\dots 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \text{ (porque é o inverso de um limite notável)} \dots\dots\dots 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \times 1 \dots\dots\dots 2$$

Concluir que a recta de equação  $x = 0$  não é assíntota do gráfico de  $g$ .....5