



[www.esaas.com](http://www.esaas.com)

Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva  
**EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE**  
**A EXAME NACIONAL**

**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**

**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos**

Duração da prova: 150 minutos

2.ª FASE

2007

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

**COTAÇÕES**

<b>Grupo I</b> .....	<b>63</b>
Cada resposta certa . .....	9
Cada resposta errada . .....	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0
 <b>Grupo II</b> .....	 <b>137</b>
<b>1.</b> .....	<b>21</b>
1.1. ....	12
1.2. ....	9
<b>2.</b> .....	<b>34</b>
2.1. ....	10
2.2. ....	10
2.3. ....	14
<b>3.</b> .....	<b>36</b>
3.1. ....	8
3.2. ....	12
3.3. ....	16
<b>4.</b> .....	<b>14</b>
<b>5.</b> .....	<b>32</b>
5.1. ....	20
5.1.1. ....	10
5.1.2. ....	10
5.2. ....	12
 <b>TOTAL</b> .....	 <b>200</b>

# CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

## Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	D	A	C	C	C	A
Versão 2	D	B	C	D	B	A	C

## Grupo II

### Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
  - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
  - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
    - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
    - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
  - 4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
  - 4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
  - 4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.
7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a

utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

### Critérios específicos

1.1. ....12

$z^3 = z_1 + 7 - \sqrt{7} i \Leftrightarrow z^3 = 8$  .....2

$z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 8cis 0$  (ver nota 1).....3 (1+2)

$z = 2 cis \frac{0+2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}$  (ver nota 2).....3 (1+1+1)

Escrever as três raízes ( $2cis 0, 2cis \frac{2\pi}{3}$  e  $2cis \frac{4\pi}{3}$ ) (ver nota 3).....4 (1+3x1)

#### Notas:

1. A subdivisão desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita do módulo; 2 pontos pela escrita do argumento. Não se exige a apresentação de cálculos intermédios.

2. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita de 2; 1 ponto pela escrita de  $cis \frac{2k\pi}{3}$ ; 1 ponto pela escrita de  $k \in \{0,1,2\}$  (e examinando poderá escrever  $k \in \mathbb{Z}$ , desde que, depois, use os valores adequados de  $k$ ).

3. A subdivisão da cotação desta etapa, indicada entre parêntesis, corresponde a: 1 ponto pela escrita de 2; 1 ponto pela escrita correcta do módulo comum a todas as raízes e 1 ponto por cada um dos três argumentos (que deverão ser apresentados na forma mais simplificada possível).

1.2. ....9

$|z_1| = \sqrt{8}$  .....1

$2 + 2i = \sqrt{8} cis \frac{\pi}{4}$  .....2

$z_2 = \sqrt{8} cis \left( \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} \right)$  .....3

$|z_2| = \sqrt{8}$  .....1

Conclusão.....2

**2.1.** ..... **10**

$N(0) = 20$  .....4

$k = 100$  .....6

**2.2.** ..... **10**

Substituir  $t$  por 6,5 (**ver nota 1**).....3

$N(6,5) = \frac{100}{1 + 4e^{-6,5}}$  (**ver nota 2**).....4

$N(6,5) \approx 99,4$  (**ver notas 3 e 4**).....3

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir penalizações relativas a substituições incorrectas:

- substituir  $t$  por 6,6 ..... penalização de 2 pontos
- substituir  $t$  por outro valor..... penalização de 3 pontos

2. Não se exige a apresentação deste passo, isto é, o examinando pode escrever, simplesmente,  $N(6,5) \approx 99,4$

3. Se o examinando, nos cálculos intermédios, não conservar, no mínimo, três casas decimais, deve ser penalizado em 1 ponto.

4. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às décimas, ou se o apresentar incorrectamente, deverá ser penalizado em 1 ponto.

**2.3.** ..... **14**

Equacionar o problema ( $N(t) = 5$ ).....3

$N(t) = 5 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{19}{4}$  (ou equivalente) .....4

$e^{-t} = \frac{19}{4} \Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{19}{4}\right)$  (ou equivalente).....3

$t \approx -1,558$  (**ver notas 1 e 2**).....2

Conclusão (Ano 1998).....2

**Notas:**

1. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às centésimas, ou se o apresentar incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

2. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de três casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

3.1. ....8

$x^2 \times C(x) = 100$  .....7

$C(x) = \frac{100}{x^2}$  .....1

3.2. ....12

$A(x) = C(x) \cdot (x - 2)$  .....9

$A(x) = \frac{100x - 200}{x^2}$  .....3

3.3. ....12

$A'(x) = \frac{400 - 100x}{x^3}$  (ver nota 1) .....4

Determinar o zero da derivada de  $A$  .....3

$A'(x) = 0$  .....1

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$  .....2

Constatação de que 4 é um maximizante de  $A$  (ver nota 2) .....3

Determinar a área máxima:  $A(4) = 12,5$  .....2

**Notas:**

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a derivada de  $A$ , a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

2. O examinando pode apresentar um quadro com o estudo do sinal de  $A'$  e conseqüentemente conclusão, relativamente à monotonia de  $A$  e existência de um maximizante. Nesta situação, o quadro deve ser cotado da seguinte maneira:

Primeira linha correcta (domínio, de 0 a 6) .....1

Segunda linha correcta (sinal de  $A'$ ) de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para a derivada de  $A$  .....1

Terceira linha correcta (relação entre o sinal de  $A'$  e a monotonia de  $A$  e existência de um maximizante) .....1

Conteúdo (ver notas 1, 2 e 3).....12

Forma (ver nota 4).....2

**Notas:**

1. Os motivos de rejeição das opções incorrectas são, por exemplo, os seguintes:

Opção A: a imagem de 0 é 27 e não 25  
 ou  
 o máximo da função é 27 e não 30.

Opção B: o máximo da função é aproximadamente 27,66 e não 30.

Opção C: a função é crescente nos primeiros instantes e não decrescente.

2. A explicação do motivo pelo qual é rejeitada cada uma das opções erradas vale 4 pontos, a serem atribuídos de acordo com o seguinte critério:

O motivo apresentado é correcto e está devidamente fundamentado.....4

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está incompleta ou contém imperfeições... ..3

O motivo apresentado é correcto, mas a sua fundamentação está errada ou não existe.....2

O motivo apresentado não é correcto.....0

3. Não deverá ser valorizada qualquer explicação sobre as razões pelas quais a opção D está de acordo com a situação a modelar, dado que tal não é pedido no enunciado.

4. Quanto à forma, a composição deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).....2

Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.....1

Ausência de composição ou redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.....0

5.1.1. ....10

Escrever correctamente os dados do problema numa tabela (ou num diagrama em árvore, ou num diagrama de Venn, ...), como se exemplifica a seguir .....4

	$F$	$\bar{F}$	Total
$A$	0,3		
$\bar{A}$		0,1	
Total	0,5		

Probabilidade pedida = 40% . .....6

$P(F \cap \bar{A}) = 20\%$  .....1

$P(\bar{F} \cap A) = 100\% - (30\% + 20\% + 10\%)$  .....4

$P(\bar{F} \cap A) = 40\%$  .....1

ou

$P(\bar{F}) = 50\%$  .....3

$P(\bar{F} \cap A) = 40\%$  .....3

**Nota:**

Se o examinando não apresentar o resultado final na forma de percentagem, deverá ser penalizado em 1 ponto.

5.1.2. ....10

Identificar a probabilidade pedida com  $P(A | F)$  ....3

$P(A | F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)}$  .....3

$P(A | F) = \frac{0,3}{0,5}$  .....3

$P(A | F) = \frac{3}{5}$  .....1

**5.2.** ..... **12**

Expressão que dá a probabilidade (**ver notas 1 e 2**) .....11

Resultado na forma de fracção irredutível (**ver nota 3**) .....1

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação atribuir.

Expressão correcta  $\frac{7! \times 3!}{10!}$  ou  $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8}$  ou equivalente.....11

Outras expressões:  $\frac{3!}{10!}$  ou  $\frac{7!}{10!}$  ou equivalente.....6

Outras situações.....0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.