

EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE A EXAME NACIONAL

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

1.ª FASE

2009

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I	63
Cada resposta certa	9
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada.....	0
 Grupo II	 137
1.	21
1.1.	12
1.2.	9
2.	32
2.1.	16
2.2.	16
3.	26
3.1.	10
3.2.	16
4.	26
4.1.	13
4.2.	13
5.	20
5.1.	10
5.2.	10
6.	12
 TOTAL	 200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o aluno dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Respostas	A	D	D	B	C	C	C

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o aluno se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um aluno utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o aluno deve percorrer para as resolver.
 - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
 - 4.3. No caso de o aluno cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o aluno as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
 - 4.4. Caso o aluno cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo aluno, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
 - 4.5. Pode acontecer que o aluno, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo aluno, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o aluno pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O aluno pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o aluno utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o aluno não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o aluno a uma resolução analítica, sem calculadora, e o aluno a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
8. Tudo o que o aluno escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o aluno escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

1.1.	12
Substituir na expressão z_1 e z_2	2 (1+1)
$\left(\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^8 = \text{cis}(2\pi)$	2
$\text{cis}(2\pi) = 1$	1
$z_1 + (z_2)^8 = 5 - 3i$	1
Indicar a multiplicação de ambos os termos da fracção por $-1 - i$	1
$(5 - 3i) \times (-1 - i) = -8 - 2i$	2
$(-1 + i) \times (-1 - i) = 2$	2
Obter o resultado final: $-4 - i$	1

1.2.	9
Representação de $ z \leq 1$ (ver nota 1)	3
Representação de $0 \leq \text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(z_2)$ (ver nota 2)	3
Indicação da região pedida, com a fronteira a cheio e o interior sombreado (ver nota 3)	3

Notas:

- Esta etapa deverá ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
 - Marca correctamente o centro e o raio e desenha um círculo.....3
 - Marca correctamente o centro e o raio e desenha uma circunferência.....1
 - Outras situações.....0
- Esta etapa deverá ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:
 - Representação correcta: semirecta coincidente com o semieixo positivo Ox
e bissetriz do primeiro quadrante.....3
 - Representação das duas semi-rectas, mas em que pelo menos uma delas
não está correctamente desenhada.....2
- A cotação desta etapa só deve ser atribuída se nenhuma das etapas anteriores tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.
Se a fronteira não estiver representada a cheio, a cotação desta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$ 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico de f2

Referir que, pelo facto de f ser contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, o seu gráfico não tem outras assíntotas verticais.....2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (limite notável).....2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

.....1

Concluir que não há assíntotas horizontais quando $x \rightarrow +\infty$ 2

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 3

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ 2

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 1

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assíntota do gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$ 2

$f'(x) = \frac{3(x-1)e^x}{x^2}$ (ver nota 1).....6

Determinar o zero da derivada de f 4

$f'(x) = 0$ 1

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ 3

Constatação de que 1 é um maximizante de f (ver nota 2).....6

Notas:

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a derivada de f , a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

2. O examinando pode apresentar um quadro com o estudo do sinal de f' e consequentemente conclusão, relativamente à monotonia de f e existência de um maximizante. Nesta situação, o quadro deve ser cotado da seguinte maneira:

Primeira linha correcta (domínio, de $-\infty$ a $+\infty$).....2

Segunda linha correcta (sinal de f') de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para a derivada de f 2

Terceira linha correcta (relação entre o sinal de f' e a monotonia de f e existência de um maximizante).....2

3.1.	10
Substituir t por 9 (ver nota 1).....	6
$E(9) \approx 2$ (ver nota 2).....	4

Notas:

1. Se o aluno substituir t por 2009, deverá ser penalizado em 4 pontos.
2. Se o aluno não apresentar o resultado final arredondado às unidades, ou se o apresentar incorrectamente, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.2.	16
Equacionar o problema ($E(t) = 8$).....	3
Resolver a equação $\frac{12}{1+10e^{-0,08t}} = 8$	11
Obter a equação $e^{-0,08t} = \frac{1}{20}$ (ou equivalente).....	5
Obter a equação $-0,08t = \ln\left(\frac{1}{20}\right)$ (ou equivalente).....	3
Restantes cálculos.....	3
Resposta: 2037.....	2

4.1.	13
$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{g(x) - g(2\pi)}{x - 2\pi} = g'(2\pi)$	9
$g'(2\pi) = 2\pi$	4

4.2.13

Equacionar o problema ($g'(x) = 0$) (ver nota 1).....	7
Explicação do método utilizado para resolver a equação (ver nota 2).....	3
Indicação do valor da abcissa pedida (ver nota 3).....	3

Notas:

1. O aluno poderá não escrever explicitamente esta questão. Se existir evidência da procura de zero de g' , estes 7 pontos deverão ser atribuídos.

2. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O aluno apresenta o gráfico de g' e assinala correctamente o seu zero.

ou

O aluno não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora, evidenciando a procura do referido zero3

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora»0

2. A escrita da abcissa do ponto de intersecção deve ser cotada, independentemente de o aluno ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

0,95	3
0,94 ou 0,96	2
0,93 ou 0,97	1
Outros valores	0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às centésimas):

Valor no intervalo $[0,945;0,954]$	2
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0,940;0,960]$	1
Outras situações	0

3.º Caso (apresentação do resultado com uma casa decimal):

0,9	1
Outros valores	0

5.1.	10
Expressão que dá o número pedido (ver nota 1).....	9
Resultado final: 3003 (ver nota 2).....	1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

${}^{15}C_5$ (ou equivalente).....	9
${}^{15}A_5$ (ou equivalente).....	4
Outras situações.....	0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

5.2.	10
Expressão que dá o número pedido (ver nota 1).....	9
Resultado final: 3150 (ver nota 2).....	1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

$15 \times {}^{10}C_4$ (ou equivalente).....	9
$15 \times {}^{10}A_4$ (ou equivalente).....	4
Outras situações.....	0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

- Referência à Regra de Laplace
- Explicação do número de casos possíveis
- Explicação do valor $5 \times {}^5C_2$ nos casos favoráveis
- Explicação do valor 5C_3 nos casos favoráveis
- Explicação do valor $5 \times {}^5C_2 + {}^5C_3$ nos casos favoráveis

A classificação a atribuir deve estar de acordo com a seguinte tabela:

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
A composição contempla correctamente os cinco pontos	10	11	12
A composição contempla correctamente quatro pontos	7	8	9
A composição contempla correctamente três pontos	5	6	7
A composição contempla correctamente dois pontos	3	4	5
A composição contempla correctamente um ponto	1	2	3

Nível 3 - Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.

Nível 2 - Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.

Nível 1 - Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.