



www.esaas.com

Escola Básica e Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva

**EXAME A NÍVEL DE ESCOLA EQUIVALENTE
A EXAME NACIONAL**

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 150 minutos

1.ª FASE

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa 9
 Cada resposta errada 0
 Cada questão não respondida ou anulada.....0

Grupo II137

1. 21
 1.1.12
 1.2.9

2. 21
 2.1.10
 2.2.11

3. 11

4. 26
 4.1.13
 4.2.13

5. 34
 5.1.20
 5.1.1.8
 5.1.2.12
 5.2.14

6. 24
 6.1.12
 6.2.12

TOTAL200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	A	D	D	D	B	C
Versão 2	B	D	A	A	B	D	D

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
 - 4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - 4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
 - 4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
 - 4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
 - 4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

1.1.12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$$\frac{i + \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right)^6}{-2 + 2i} = \frac{i + \operatorname{cis}(2\pi)}{-2 + 2i} \dots\dots\dots 2$$

$$\frac{i + \operatorname{cis}2\pi}{-2 + 2i} = \frac{1 + i}{-2 + 2i} \dots\dots\dots 2$$

$$\frac{1 + i}{-2 + 2i} = \frac{(1 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} \dots\dots\dots 2$$

$$\frac{(1 + i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} = -\frac{1}{2}i \dots\dots\dots 3$$

$$-\frac{1}{2}i = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \text{ (ver nota 1)} \dots\dots\dots 3$$

2.º Processo

$$\frac{i + \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right)^6}{-2 + 2i} = \frac{i + \operatorname{cis}(2\pi)}{-2 + 2i} \dots\dots\dots 2$$

$$\frac{i + \operatorname{cis}2\pi}{-2 + 2i} = \frac{1 + i}{-2 + 2i} \dots\dots\dots 2$$

$$1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \text{ (ver nota 2)} \dots\dots\dots 3$$

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) \text{ (ver nota 3)} \dots\dots\dots 3$$

$$\frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right)} = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \dots\dots\dots 2$$

Notas:

1. A escrita de $-\frac{1}{2}i$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$$\left|-\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1$$

Argumento de $-\frac{1}{2}i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence ao eixo Oy).....1

Escrita na forma $\rho \operatorname{cis} \theta$ 1

2. A escrita de $1+i$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$$|1+i| = \sqrt{2} \dots\dots\dots 1$$

Argumento de $1+i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence bissectriz dos quadrantes ímpares).....1

Escrita na forma $\rho \operatorname{cis} \theta$ 1

3. A escrita de $-2+2i$ na forma trigonométrica deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

$$|-2+2i| = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 1$$

Argumento de $-2+2i$ correcto (não se exige a apresentação de cálculos intermédios, dado que a imagem geométrica do complexo pertence bissectriz dos quadrantes pares).....1

Escrita na forma $\rho \operatorname{cis} \theta$ 1

1.2.9

A condição $1 \leq |z| \leq 2$ 4

$|z| \leq 2$ (ver nota 1).....2

$|z| \geq 1$ (ver nota 1)2

$\operatorname{Im}(z) \leq 0$ 1

$1 \leq |z| \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0$ (ver nota 2).....1

Determinação da área pedida ($\frac{3\pi}{2}$)..... 3

Área da coroa circular 2

Divisão por 2 1

Notas:

1. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Marca correctamente o centro e o raio e desenha um círculo.....2

Marca correctamente o centro e o raio e desenha uma circunferência.....1

Outras situações.....0

2. A cotação desta etapa só deve ser atribuída se nenhuma das etapas anteriores tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

2.1.10

Expressão que dá a probabilidade (**ver notas 1 e 2**)9

Resultado na forma de fracção irredutível (**ver nota 3**)1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação atribuir.

Expressão correcta $\left(\frac{8}{23} \times \frac{7}{22} \text{ ou } \frac{{}^8C_2}{{}^{23}C_2} \text{ ou } \frac{{}^8A_2}{{}^{23}A_2} \text{ ou equivalente} \right)$ 9

Expressão que estaria correcta se a tiragem fosse feita com reposição

$\left(\frac{8}{23} \times \frac{8}{23} \text{ ou equivalente} \right)$ 3

Outras situações.....0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

2.2.11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Referir que existem 5 discos de música clássica, dos quais 2 são do Dino8

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{5}$ 3

2.º Processo

Referir que $P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ (**ver nota 1**)3

Concluir que $P(B | A) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}}$ (**ver nota 2**)7

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{5}$ 1

Notas:

1. Se a fórmula apresentada pelo examinando estiver incorrecta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à totalidade da resposta a este item.

2. Se o examinando, desrespeitando a instrução do enunciado, não explicitar os valores de $P(B \cap A)$ e de $P(A)$, ou seja, se escrever $P(B | A) = \frac{2}{5}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 3 pontos.

3.	11
$P(B) = 0,3$	3
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	3
$P(A \cap B) = 0,09$	2
Conclusão: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	3

4.1.	13
$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2$	3
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$	1
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ (porque é um limite notável).....	2
Concluir que a recta de equação $x = 0$ não é assíntota do gráfico de g	2
$\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g(x) = 1$	2
Concluir que a recta de equação $x = 2\pi$ não é assíntota do gráfico de g	2
Justificar a não existência de outras assíntotas verticais.....	2
Justificar a não existência de assíntotas não verticais (ver nota).....	2

Nota:

Se o aluno tentar estudar a existência de assíntotas não verticais, para além de não lhe serem atribuídos os pontos relativos a esta etapa, deve ainda ser penalizado em 2 pontos, na cotação final a atribuir a esta questão. Se, em consequência desta desvalorização, a cotação resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

Desenho pedido.....5

 Reprodução correcta do referencial, do gráfico de g e da recta r ,
de acordo com a janela indicada no enunciado (**ver nota 1**).....2

 Representação correcta do ponto A (**ver nota 2**).....2

 Representação correcta do ponto B1

Ordenada do ponto A : 1,64 (**ver nota 3**).....2

Abcissa do ponto B : 3,14 (**ver nota 4**).....3

Cálculo do comprimento do segmento $[AB]$: 1,7 (**ver nota 5**).....3

Notas:

1. Se o aluno reproduzir incorrectamente pelo menos um dos três elementos referidos (referencial, gráfico de g e recta r), esta etapa deverá ser classificada com 0 (zero) pontos.

2. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

 Ponto A no gráfico de g , com uma abcissa entre 2 e 4.....2

 Outras situações0

3. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação da abcissa de A com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

 1,64 2

 1,63 ou 1,65 1

 Outros valores 0

2.º Caso (apresentação da abcissa de A com mais de duas casas decimais):

 Valor no intervalo $[1,636;1,644]$ 1

 Outras situações 0

3.º Caso (apresentação da abcissa de A com uma casa decimal):

 1,6 1

 Outros valores 0

4. Esta etapa deverá ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação da abcissa de B com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

 3,14 3

 3,13 ou 3,15 2

 Outros valores 0

2.º Caso (apresentação da abcissa de B com mais de duas casas decimais):

Valor no intervalo $[3,136;3,144]$	2
Valor não pertencente ao intervalo anterior, mas no intervalo $[3,130;3,150]$	1
Outras situações	0

3.º Caso (apresentação da abcissa de B com uma casa decimal):

3,1	1
Outros valores	0

5. O cálculo do comprimento pedido pode ser feito por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

(o examinando considera um triângulo cujo segmento $[AB]$ é a hipotenusa):

Base $\approx 3,14 - 1,57$	1
Altura $\approx 1,64 - 1$	1
$\overline{AB} \approx 1,7$	1

2.º Processo

$\ \overline{AB}\ \approx \sqrt{1,57^2 + 0,64^2}$	2
$\ \overline{AB}\ \approx 1,7$	1

5.1.1.	8
Substituir t por 15 (ver nota 1).....	3
$f(15) = 18 - 16e^{-0,1 \times 15}$ (ver nota 2).....	3
$f(15) \approx 14,4$ (ver notas 3 e 4).....	2

Notas:

1. Indicam-se a seguir penalizações relativas a substituições incorrectas:

- substituir t por 13,15 penalização de 2 pontos
- substituir t por 1,15 penalização de 3 pontos

2. Não se exige a apresentação deste passo, isto é, o examinando pode escrever, simplesmente, $f(15) \approx 14,4$

3. Se o examinando, nos cálculos intermédios, não conservar, no mínimo, três casas decimais, deve ser penalizado em 1 ponto.

4. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às décimas, ou se o apresentar incorrectamente, deverá ser penalizado em 1 ponto.

5.1.2.12

Evidenciar a intenção de calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ 1

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 18$ 7

 Valor correcto do limite1

 Justificação (**ver nota 1**).....6

Interpretação (**ver notas 2 e 3**)4

Notas:

1. A justificação completa envolve as seguintes referências:

$-0,1t \rightarrow -\infty$;

$e^{-0,1t} \rightarrow 0$;

$-16e^{-0,1t} \rightarrow 0$

Cada referência vale 2 pontos.

2. A interpretação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta (*Com o passar do tempo, a temperatura da bebida tende a atingir a temperatura ambiente*).....4

Interpretação conceptualmente correcta, mas com algumas incorrecções de linguagem.....3

3. Se o valor do limite não tiver sido calculado, ou se estiver errado, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à interpretação, qualquer que esta seja.

5.2.14

Equacionar o problema ($f(t) = 17$).....3

$f(t) = 17 \Leftrightarrow e^{30k} = \frac{1}{16}$ 3

$e^{30k} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 30k = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$5

$k \approx -0,09$ (**ver notas 1 e 2**).....3

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às centésimas, ou se o apresentar incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

2. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de três casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

$f'(1) = 2$ 2

Identificar o declive da recta com $f'(1)$ 3

Escrever uma equação da recta.....7

Estabelecer a igualdade $y = 2x + b$ 1

$-1 = 2 \times 1 + b$ 1

$b = -3$ 2

Escrever a equação reduzida ($y = 2x - 3$).....3

ou

Escrever a equação $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ 4

Escrever a equação reduzida ($y = 2x - 3$).....3

ou

Um vector director é $(1, 2)$ 3

Escrever uma equação vectorial $((x, y) = (1, -1) + k(1, 2), k \in \mathbb{R})$4

Notas:

1. A obtenção do declive da recta por um método incorrecto (isto é, se não tiver a ver com $f'(1)$) implica a atribuição de cotação 0 (zero) na cotação total desta questão.
2. Se o examinando, não reparando que já é dada a expressão da derivada de f , assumir f' como f , calculando o declive da recta à custa da derivada da função dada no enunciado, deve ser penalizado em 4 pontos, na totalidade das duas primeiras etapas. Este ponto só deve ser atribuído no caso em que o examinando calcula correctamente o declive da recta, de acordo com a confusão que estabeleceu ao assumir f' como f . As etapas subsequentes devem receber a cotação indicada, se correctamente resolvidas, de acordo com o erro cometido. Nesta situação, é de aceitar que o examinando assumia $f(1)$ como -1 (valor dado no enunciado) ou como 2 (valor por ele encontrado ao assumir f' como f).
3. Se o examinando derivar a função do enunciado, mas designar essa derivada por $f''(x)$, devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta (considerou-se que esta situação é diferente da descrita na nota 2, já que, ao escrever $f''(x)$, o examinando mostra não estar a assumir f' como f).

$f''(x) = 2 + \frac{1}{x}$ (ver nota 1).....4

Determinar o zero da segunda derivada de f 4

$f''(x) = 0$ 1

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$3

Constatação de que $-\frac{1}{2}$ não pertence ao domínio da função (ver nota 2).....3

Conclusão: o gráfico de f não tem pontos de inflexão.....1

Notas:

1. Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a segunda derivada de f , a cotação mínima a atribuir a esta etapa é de 1 ponto.

2. O examinando pode apresentar um quadro com o estudo do sinal de f'' e consequentemente conclusão, relativamente aos sentidos das concavidades do gráfico de f e à não existência de pontos de inflexão. Nesta situação, o quadro deve ser cotado da seguinte maneira:

Primeira linha correcta (domínio, de 0 a $+\infty$).....1

Segunda linha correcta (sinal de f'') de acordo com a primeira linha e com a expressão obtida para a segunda derivada de f 1

Terceira linha correcta (relação entre o sinal de f'' e o sentido da concavidade do gráfico de f).....1

3. Pode acontecer que o examinando, não reparando que já é dada a expressão da derivada de f , assuma f' como f e derive duas vezes esta função. Neste caso, a cotação a atribuir à sua resposta é de 6 pontos, caso ela esteja completamente correcta, de acordo com a confusão estabelecida. Se, para além desta confusão, a resolução contiver algum erro, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à resposta.

