6.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 3

3.º Período –<u>02/06/06</u> **Duração: 90 minutos**

Nome: ____________________________________ **N.º:** _____ **Classificação:** ☐☐ , ☐

O professor:

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. "*Ensei Tankado tinha construído a sua carreira com base nos números primos. Os números primos eram elementos fundamentais de todos os algoritmos de cifragem – eram valores únicos apenas divisíveis por si próprios e pela unidade. Os números primos funcionavam bem na escrita de códigos porque os computadores não conseguiam calculá-los usando o sistema típico de decomposição.*(…) *Entre zero e um milhão, havia mais de setenta mil* [*números primos*]"

FORTALEZA DIGITAL, Dan Brown

Para abrir um certo cofre, é necessário um código de seis caracteres (em que se podem usar 23 letras e 10 algarismos).
Alguém vai abrir o cofre, **sabendo** que apenas os dois últimos caracteres são números primos e diferentes.
Qual é a probabilidade de acertar à primeira tentativa?

(A) $\frac{1}{12}$ **(B)** $\frac{{}^{12}C_2}{29^6}$ **(C)** $\frac{1}{29^4 \times 12}$ **(D)** $\frac{12}{33^2}$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$ e tal que a sua **derivada** está definida por $f'(x) = \ln x$.
Qual é a proposição verdadeira?

(A) f tem um ponto de inflexão para $x = e$

(B) f tem um máximo relativo para $x = 1$

(C) f é decrescente em $[1, +\infty[$

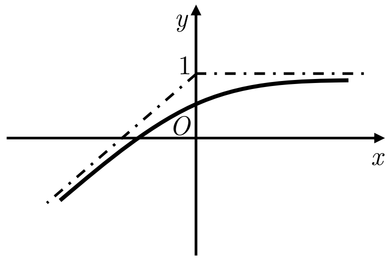
(D) f é decrescente em $]0, 1]$

3. Qual é o conjunto-solução, em $[0, 2\pi]$, da equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$?

(A) $\left\{\frac{\pi}{5}\right\}$ **(B)** $\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$ **(C)** $\left\{\frac{9\pi}{5}\right\}$ **(D)** $\left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

4. O gráfico da função g, representado ao lado, admite duas assimptotas, uma horizontal e outra oblíqua.

Qual é o valor de $\lim_{x \to -\infty} g(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$?

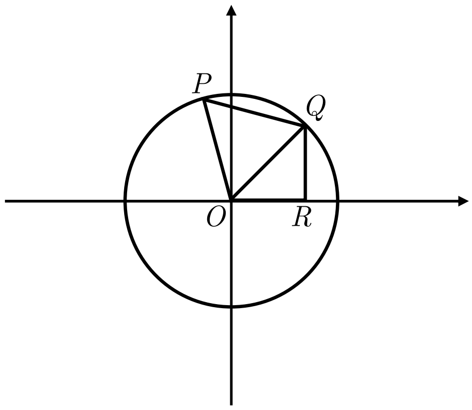


(A) 0 **(B)** $+\infty$

(C) 1 **(D)** $-\infty$

5. Na figura estão representados, no plano complexo:

- Uma circunferência centrada na origem e de raio 1;
- O triângulo **equilátero** $[OPQ]$;
- O triângulo **isósceles** $[OQR]$, rectângulo em R .



Seja w a imagem geométrica de P.

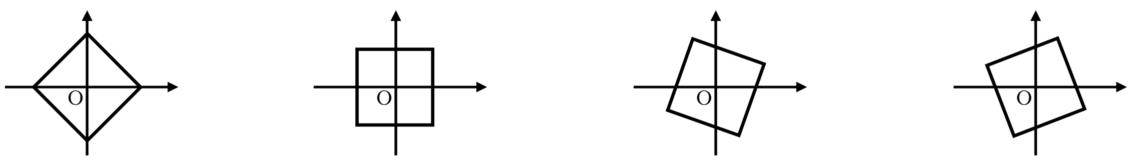
Qual dos números complexos seguintes representa w ?

(A) $cis\,\frac{7\pi}{12}$ **(B)** $cis\,\frac{2\pi}{3}$

(C) $cis\,\frac{9\pi}{16}$ **(D)** $cis\,\frac{5\pi}{9}$

6. No conjunto $\mathbb{C}$, considere o número $z = a$, em que $a > 0$. Dos quadrados a seguir representados, qual pode ter por vértices as imagens geométricas das raízes quartas de z ?

(A) **(B)** **(C)** **(D)**



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Sejam P a imagem geométrica de um complexo não nulo w e α um seu argumento.

Sabendo que $Arg\left(w^3\right) = \alpha + \frac{\pi}{2}$, prove que P pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = -\sqrt{3} - 3i$ e $z_2 = cis\,\frac{5\pi}{3}$.

Sem usar a calculadora, resolva as quatro alíneas seguintes.

2.1. Determine o valor de $\frac{z_1}{i^{53}}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.2. Escreva o **simétrico** do número $\overline{z_2}$ na forma algébrica.

2.3. Justifique que z_2 é uma raiz sexta de 1.

Determine uma outra raiz sexta de 1, cuja imagem geométrica está no primeiro quadrante.

2.4. Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$\left|z - \sqrt{3} - z_1\right| \leq 2 \quad \wedge \quad Re(z) \geq \left|z_2\right|$$

3. "*– O veado subia na vertical a cerca de um metro por segundo, tendo em conta a inclinação da encosta. A quinhentos metros, o tempo de voo de uma bala é um pouco inferior a três quartos de segundo, por conseguinte eu tinha de fazer pontaria a cerca de um metro à frente do ponto que queria atingir.*"

SOMBRAS SOBRE A BABILÓNIA, David Mason

O Virgínio segue um veado há um certo tempo. Admita que a distância, em metros, do veado ao Virgínio é dada por

$$d(t) = 400\left[\cos\left(\frac{t}{100}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{t^2}{100}\right) \times e^{-0{,}1t}\right]$$

nos primeiros **60 segundos**.

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos e a variável t está em segundos).

Nesses sessenta segundos, e de modo a que o Virgínio tenha hipóteses de dar um tiro no veado, ele sabe que:

- O veado tem de estar sempre a uma distância superior a 320 metros;
- O veado não pode estar a uma distância superior a 500 metros mais do que dez segundos;

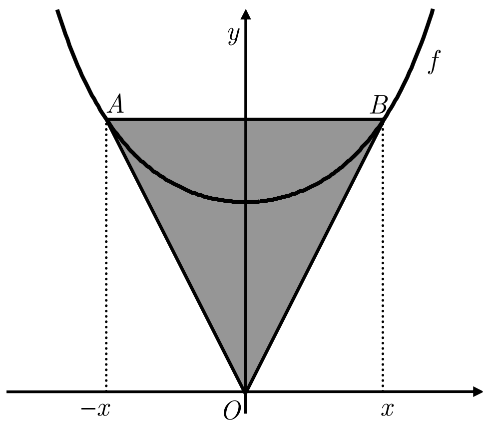
Conseguirá o Virgínio apanhar o veado?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

4. No referencial o.n. xOy ao lado estão a representação gráfica da função f, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=1+\mathrm{tg}^2\,x$ e o triângulo isósceles $[ABO]$.

Os pontos A e B pertencem ao gráfico de f.

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.



4.1. Determine as dimensões do triângulo $[ABO]$ se a função f intersectar a recta de equação $y=2$ nos pontos A e B.

4.2. Mostre que a área do triângulo $[ABO]$ é dada, em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, pela função definida por $A(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$.

4.3. Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (146 pontos)	**1.**..........16	**2.**..........68 **2.1.**..........18 **2.2.**..........16 **2.3.**..........18 **2.4.**..........16	**3.**..........18	**4.**..........44 **4.1.**..........16 **4.2.**..........16 **4.3.**..........12

Formulário

Trigonometria

$\mathrm{sen}(a+b)=\mathrm{sen}\,a\cdot\cos b+\mathrm{sen}\,b\cdot\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\mathrm{sen}\,a\cdot\mathrm{sen}\,b$

$\mathrm{tg}(a+b)=\frac{\mathrm{tg}\,a+\mathrm{tg}\,b}{1-\mathrm{tg}\,a\cdot\mathrm{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\,cis\,\theta)^n=\rho^n cis(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\,cis\,\theta}=\sqrt[n]{\rho}\,cis\frac{\theta+2k\pi}{n}\ ,\ k\in\{0,\dots,n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'\quad(n\in\mathbb{R})$

$(\mathrm{sen}\,u)'=u'\cdot\cos u$

$(\cos u)'=-u'\cdot\mathrm{sen}\,u$

$(\mathrm{tg}\,u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)'=u'\cdot e^u$

$\left(a^u\right)'=u'\cdot a^u\cdot\ln a\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\cdot\ln a}\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad(p\in\mathbb{R})$

O professor: RobertOliveira