

6.º TESTE DE MATEMÁTICA A

12.º 1

3.º Período - 01/06/06

Duração: 90 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

--	--	--	--

O professor: _____

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. “Francesca não parava de limpar os olhos, tentando ver, o sol formando prismas estranhos com as lágrimas.”

AS PONTES DE MADISON COUNTY, Robert James Waller

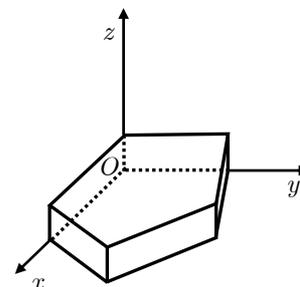
Na figura ao lado está um prisma pentagonal irregular recto. Ao escolher dois vértices ao acaso, qual é a probabilidade de eles definirem uma recta paralela ao eixo Oz ?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{5}{{}^{10}C_2}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{{}^{10}A_2}{5!}$

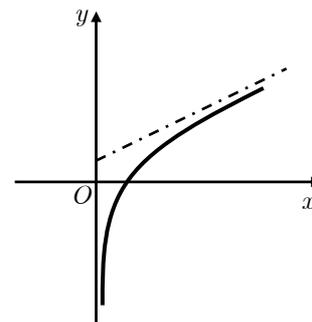


2. De uma função f , contínua no intervalo $[-3, 3]$, sabe-se que $f(-3) = 3$ e $f(3) = 6$.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-3, 3]$ (B) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[-3, 3]$ (C) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[-3, 3]$ (D) A função f não tem zeros no intervalo $[-3, 3]$

3. A função g , de domínio \mathbb{R}^+ , está representada ao lado. Como a figura sugere, o gráfico de g tem duas assíntotas, de equações $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$.

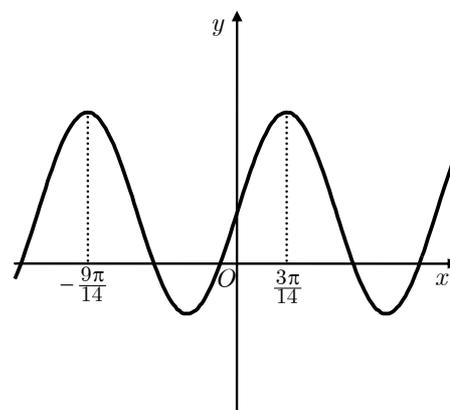


- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$ (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \frac{1}{2}$
(C) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \frac{1}{2}$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

- (A) $\frac{3\pi}{14}$ (B) $\frac{9\pi}{14}$
(C) $\frac{6\pi}{7}$ (D) $\frac{12\pi}{7}$



5. Considere, no plano complexo, um ponto A , imagem geométrica de um certo número complexo z . Sabe-se que A pertence ao terceiro quadrante. Considere também o ponto B , imagem geométrica do número complexo \bar{z} e o ponto C , imagem geométrica do número complexo $-z$. Qual é a proposição **falsa**?

- (A) Os pontos A e C pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.
(B) Os pontos B e C pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.
(C) O ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes pares e o ponto C pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.
(D) O ponto B pertence ao segundo quadrante e o ponto C pertence ao primeiro quadrante.

6. No conjunto dos números complexos, sejam w e w^i duas raízes consecutivas de índice n de um certo número complexo z . Qual é o valor de n ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

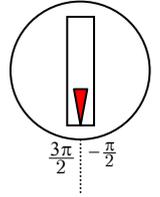
Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. A Egídia calcula que, consoante a posição do manípulo do seu esquentador, consegue obter a **temperatura máxima possível** t (em graus Celsius) da água. Por dar ideias a um círculo trigonométrico, ela supôs que essa temperatura é dada por

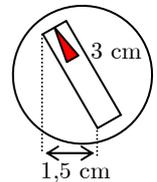
$$t(x) = 70 - 5x - \cos x, \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$



- 1.1. Sem usar a calculadora, mostre que t é decrescente.

- 1.2. A Egídia quer tomar um banho de imersão, com a água o mais quente possível. Determine a temperatura da água nessas condições. Apresente o resultado em graus Celsius, arredondados às unidades.

- 1.3. Num certo momento, o manípulo do esquentador encontra-se na posição indicada pela figura ao lado. Nas condições dessa figura, determine temperatura máxima possível da água, apresentando o resultado em graus Celsius, arredondados às unidades.



- 1.4. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

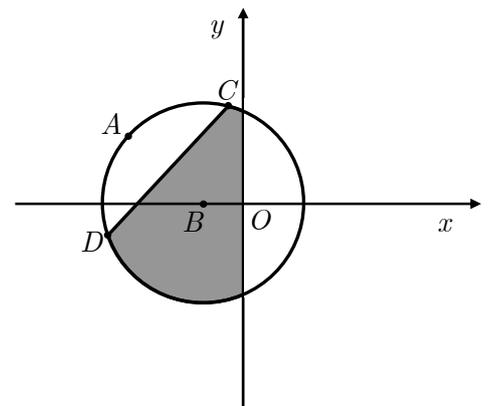
Qual terá de ser, em radianos, a amplitude de x , para que a temperatura máxima possível seja igual a 50°C ?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos** obtido(s).

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

2. Em relação ao plano complexo da figura, sabe-se que:

- A circunferência está centrada no ponto $B(-1,0)$ e tem raio igual a $\sqrt{7}$;
- Os pontos A , C e D pertencem à circunferência;
- A recta CD é a mediatriz do segmento $[AB]$;
- A é a imagem geométrica de $w_1 = 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$;
- B é a imagem geométrica de w_2 ;



- 2.1. Justifique que as coordenadas de A são $(-3, \sqrt{3})$.

- 2.2. Sem usar a calculadora, determine o número $\frac{w_2}{1-i^{45}}$ na forma trigonométrica.

- 2.3. Resolva, em \mathbb{C} , a equação $z^3 = \overline{w_1}$.

- 2.4. Defina, por meio de uma condição em \mathbb{C} , a zona sombreada da figura.

3. Seja z um complexo cuja imagem geométrica está situada no primeiro quadrante.

Sabendo que $\text{Arg}(z^4) = \text{Arg}(-z)$, prove que z^3 é um número real negativo.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (54 pontos)	Cada resposta certa: + 9	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
-------------------------------	--------------------------	---

Grupo II (146 pontos)	1.....62	2.....68	3.....16
	1.1.....16	2.1.....16	
	1.2.....14	2.2.....18	
	1.3.....16	2.3.....18	
	1.4.....16	2.4.....16	

Formulário

Trigonometria $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$	Regras de derivação $(u + v)' = u' + v'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$ $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	Limites notáveis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
--	--	--