Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2004/2005)

6.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 5

Duração: 90 minutos **Classificação:** ☐☐ , ☐

3.º Período –01/06/05

Nome:____ **N.º:**______ **O professor:**

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

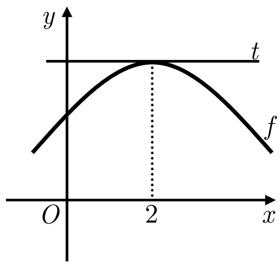
1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que:

$\mathrm{P}(A) = 0{,}4\,; \quad \mathrm{P}(\overline{B}\,) = 0{,}7; \quad \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}5.$

Qual é o valor de $\mathrm{P}(A \cap B)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f e a recta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.



Qual pode ser o valor de $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f''(x)}{f'(x)}$?

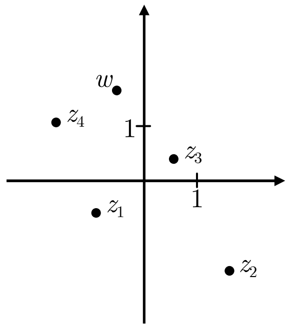
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

3. A função g está definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = cos(\mathrm{k}x)$, $\mathrm{k} \neq 0$.

Esta função é periódica e o seu período é igual a $\frac{\pi}{2}$. Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

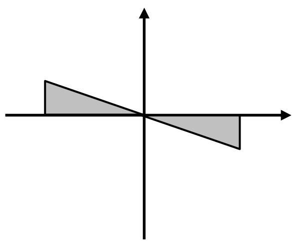
4. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.
Qual é o número complexo que pode ser igual a $2i - w$?



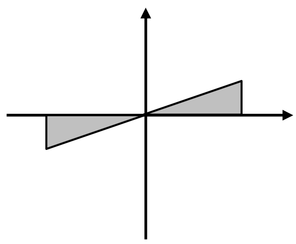
(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

5. Qual das seguintes regiões do plano complexo (indicadas a sombreado) contém as **raízes quadradas** do número $8 - 6i$?

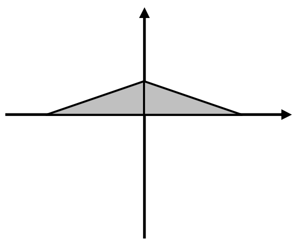
(A)



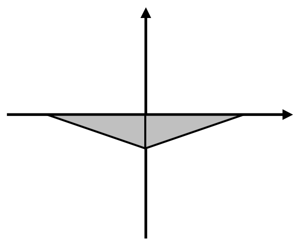
(B)



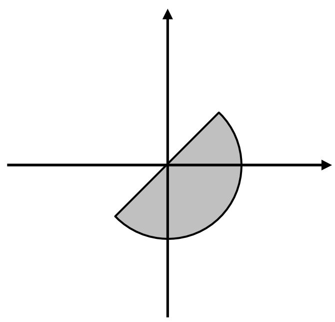
(C)



(D)



6. Na figura está representado, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem do referencial e raio igual a 1.
Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?



(A) $|z| \leq 1 \quad \wedge \quad |z-1| \leq |z-i|$

(B) $|z| \leq 1 \quad \wedge \quad |z+1| \geq |z-i|$

(C) $Re(z) \leq 1 \quad \wedge \quad |z-1| \leq |z-i|$

(D) $Im(z) \geq 1 \quad \wedge \quad |z+1| \geq |z-i|$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

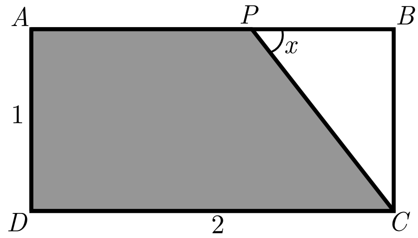
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representado a sombreado o trapézio $[APCD]$.

Tem-se que:

» $[ABCD]$ é um rectângulo de comprimento 2 e altura 1;

» x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BPC, $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.



1.1. Mostre que a área do trapézio $[APCD]$ é dada, em função de x, por $f(x) = 2 - \frac{1}{2\,tg\,x}$

1.2. Sem usar a calculadora, calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é igual ao quadrado da abcissa.

Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = -2-2i$ e $z_2 = 8\,cis\,\frac{5\pi}{6}$.

Sem usar a calculadora, resolva as seguintes alíneas.

2.1. Escreva z_1 na forma trigonométrica e z_2 na forma algébrica.

2.2. Determine $\frac{z_1}{2-3i}$ na forma algébrica.

2.3. Mostre que z_1 é uma raiz quarta de -64.

2.4. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 - z_2 = 0$, apresentando as soluções na forma trigonométrica.

2.5. Sabe-se que o simétrico de z_2 é uma raiz de índice 8 de um número complexo z.

Determine, na forma trigonométrica, outra raiz de z cuja imagem geométrica está situada no quarto quadrante.

3. No plano complexo, considere um número complexo w cuja imagem geométrica é um ponto A situado no primeiro quadrante e pertencente à recta definida pela condição $Im(z) = 3$.

Considere ainda o ponto B, imagem geométrica de $\overline{w}$ (conjugado de w).

Sendo O a origem do referencial e sabendo que o perímetro do triângulo $[AOB]$ é 16, determine w, na forma algébrica.

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	**Cada resposta certa: + 10**	**Cada resposta errada: – 2**	**Cada questão não respondida ou anulada: 0**

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II (140 pontos)	**1.** ....46 **1.1.** ....16 **1.2.** 14 **1.3.** 16	**2.** ....78 **2.1.** ....14 **2.2.** ....16 **2.3.** ....16 **2.4.** 18 **2.5.** 14	**3.** 16

O professor: RobertOliveira