Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2004/2005)

6.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2

Duração: 90 minutos **Classificação:** ☐☐ , ☐
3.º Período –02/06/05

Nome:______________________________ **N.º:**______ **O professor:**

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

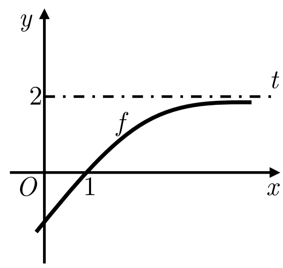
1. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que:

$\mathrm{P}(B) = 0{,}3\,;\quad \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}2;\quad \mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}5.$

Qual é o valor de $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}8$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f e a recta t, única assimptota do gráfico de f.



Qual pode ser o valor de $\lim\limits_{x\to 1} f''(x) + \lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$?

(A) -1 **(B)** 0

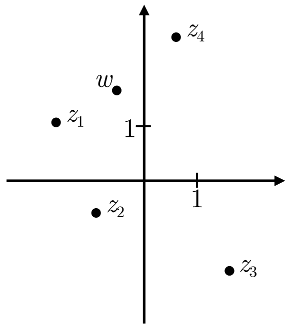
(C) 1 **(D)** $+\infty$

3. Seja g a função definida por $g(x) = ln(sen\, x)$ e seja A o seu **contradomínio**.

Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A ?

(A) $\mathbb{R}$ **(B)** $]-\infty\ ,\ 0]$ **(C)** $]-2\pi\ ,\ 0]$ **(D)** $]0\ ,\ +\infty[$

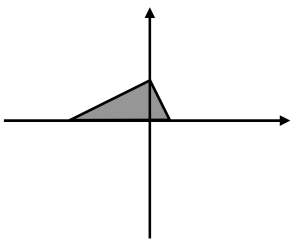
4. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos: w, z_1, z_2, z_3 e z_4.
Qual é o número complexo que pode ser igual a $\overline{w}+2$?



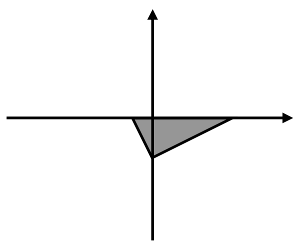
(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

5. Seja $z = ai$, com $a \in \mathbb{R}^+$, um número complexo. Qual dos seguintes triângulos (indicados a sombreado) pode conter os vértices das imagens geométricas dos números complexos z, z^2 e z^3?

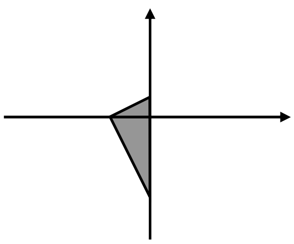
(A)



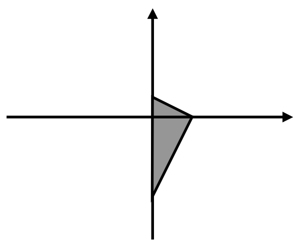
(B)



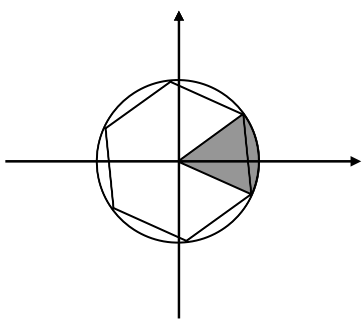
(C)



(D)



6. No plano complexo, a imagem geométrica do número complexo $z = 2\,cis\frac{\pi}{5}$ é um dos seis vértices do hexágono regular representado na figura ao lado, inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.
Qual das condições seguintes pode definir a região sombreada, incluindo a fronteira?



(A) $|z| \le 1 \quad \wedge \quad -\frac{\pi}{6} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{5}$

(B) $|z| \le 2 \quad \wedge \quad -\frac{\pi}{6} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{5}$

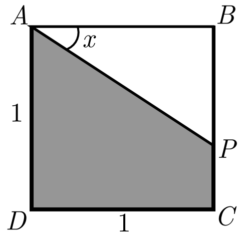
(C) $|z| \le 1 \quad \wedge \quad -\frac{2\pi}{15} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{5}$

(D) $|z| \le 2 \quad \wedge \quad -\frac{2\pi}{15} \le Arg(z) \le \frac{\pi}{5}$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.



1. Na figura está representado a sombreado o trapézio $[APCD]$.

Tem-se que:

» $[ABCD]$ é um quadrado de lado 1;

» x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAP, $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

1.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[APCD]$ é dada, em função de x, por $f(x) = 3 - tg\, x + \frac{1}{cos\ x}$

1.2. Sem usar a calculadora, calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

1.3. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é igual ao inverso da abcissa.

Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = -3 + 3i$ e $z_2 = 6\, cis \frac{4\pi}{3}$.

2.1. Escreva z_1 na forma trigonométrica e z_2 na forma algébrica.

2.2. Determine $\frac{z_1}{3-2i}$ na forma algébrica.

2.3. Seja $z_3 = \frac{z_1}{3}$. Mostre que z_3 é uma raiz de índice oito de 16.

2.4. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 - z_2 = 0$, apresentando as soluções na forma trigonométrica.

2.5. Considere agora o complexo z_4 tal que $z_4 = z_1 - 1$ e seja α um seu argumento.

Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de z_4 .

3. No plano complexo, considere um número complexo w cuja imagem geométrica é um ponto A situado no primeiro quadrante.

Considere ainda os pontos B, imagem geométrica de $\overline{w}$ (conjugado de w) e C, imagem geométrica de $-w$ (simétrico de w).

Sabe-se que $\overline{BC} = 3$ e que $\frac{w}{\overline{w}} = cis \frac{\pi}{3}$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$.

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ $(r$ – *raio*$)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n cis\,(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\, \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Grupo I (60 pontos)	**Cada resposta certa: + 10**	**Cada resposta errada: – 2**	**Cada questão não respondida ou anulada: 0**

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II (140 pontos)	**1.** ....46 **1.1.** ....16 **1.2.** 14 **1.3.** 16	**2.** ....78 **2.1.** ....14 **2.2.** ....16 **2.3.** ....16 **2.4.** 18 **2.5.** 14	**3.** 16

O professor: RobertOliveira