Escola Secundária Dr. Ângelo Augusto da Silva (2003/2004)

6.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2

Duração: 90 minutos **Classificação:** ____ , __

3.º Período – 31/05/04

Nome:________________________________ **N.º:**____ **O professor:**

Grupo I

- As seis questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. A comissão de finalistas de uma escola é composta por cinco alunos. Vai ser criado um grupo de trabalho com vinte alunos, em que, no **máximo**, há dois membros da comissão de finalistas. Designando por N o número de alunos fora da comissão, quantos grupos de trabalho se podem formar com **pelo menos** um aluno da comissão de finalistas?

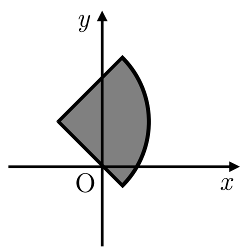
(A) $5 \times {}^{N}C_{19} \times {}^{5}C_{2} \times {}^{N}C_{18}$ **(B)** $5 \times {}^{N}C_{19} + {}^{5}C_{2} \times {}^{N}C_{18}$

(C) $5 + {}^{N}C_{19} + {}^{5}C_{2} + {}^{N}C_{18}$ **(D)** $5 + {}^{N}C_{19} \times {}^{5}C_{2} + {}^{N}C_{18}$

2. Considere dez dados cúbicos, cada um numerado de **1** a **6**, mas em que as faces com números ímpares são verdes e as faces com números pares são amarelas. O Augusto lançou os dez dados e **reparou** que as faces eram todas amarelas. Qual é a probabilidade de terem saído só números **inferiores** a 5?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ **(D)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

3. Seja A o conjunto de números complexos cujas imagens geométricas no plano complexo formam a região a sombreado (incluindo a fronteira).
Qual pode ser afirmação verdadeira?



(A) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq Arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$

(B) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \leq 2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \leq Arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

(C) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \geq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq Arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$

(D) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z+1-i| \geq 2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \leq Arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

4. Sendo i a unidade imaginária do conjunto $\mathbb{C}$, qual é o valor de i^{4n+25} ($n \in \mathbb{N}$)?

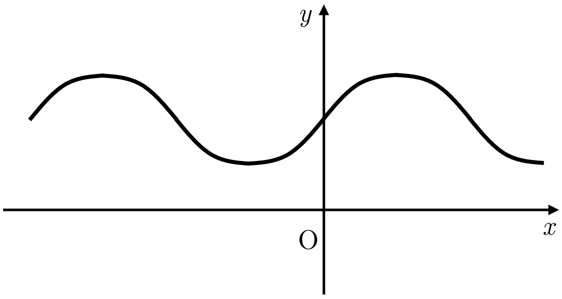
(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$

5. O número de peixes de um certo aquário, em centenas, varia, após um certo tempo t, segundo a função definida por $h(t) = 3 + \frac{5}{1+49\,e^{-0{,}1t}}$.

À medida que o tempo passa, podemos concluir que o número de peixes aproxima-se de:

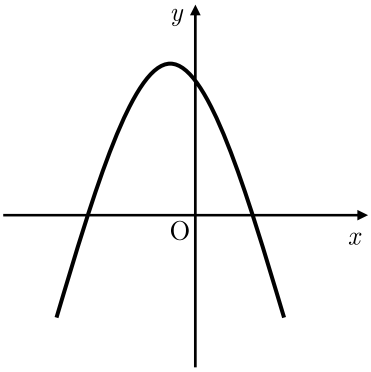
(A) 800 **(B)** 500 **(C)** 300 **(D)** 100

6. Na figura ao lado está parte do gráfico da função trigonométrica g, **segunda derivada** de uma função f, ambas de domínio $\mathbb{R}$.

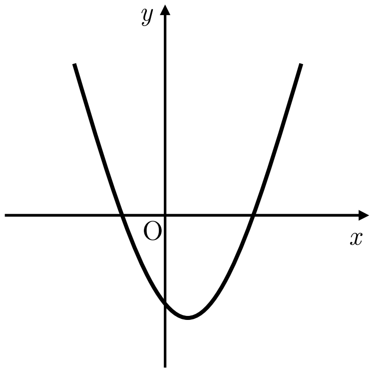


Em qual das figuras seguintes pode estar parte do gráfico de f ?

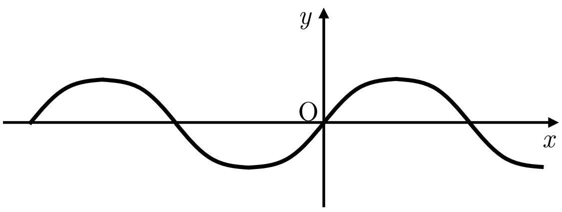
(A)



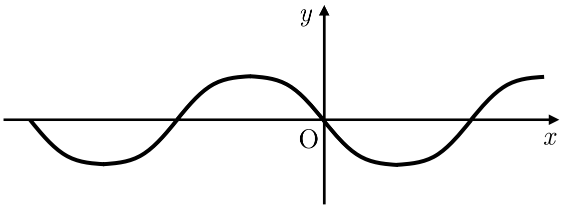
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. No plano complexo, o ponto A é a imagem geométrica de um número complexo z e o ponto B é a imagem geométrica do seu conjugado $\overline{z}$. Sabe-se que:

» O ponto A pertence ao primeiro quadrante;

» A amplitude do ângulo AOB é igual a $\frac{\pi}{3}$ (O é a origem do referencial);

» $\overline{AB} = 3$.

Determine z, na forma algébrica.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \sqrt{3} - i$ e $z_2 = 8i$.

2.1. Determine $\frac{3+i}{z_1}$ na forma algébrica.

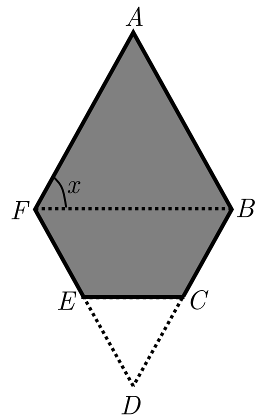
2.2. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

"*A imagem geométrica do número complexo* $z_1 \times z_2$ *pertence ao primeiro quadrante*"

2.3. **Sem usar a calculadora**, mostre que $\overline{z_1}$ é uma raiz cúbica de z_2.

2.4. Sabe-se que z_2 é uma raiz de índice 5 de um número complexo w.

Determine, na forma trigonométrica, outra raiz de w cuja imagem geométrica está situada no primeiro quadrante.



3. Na figura está representado a sombreado um polígono $[ABCEF]$. Tem-se que:

» $[ABDF]$ é um losango de altura 2;

» $[ABF]$ é um triângulo de altura 1;

» $[BCEF]$ é um trapézio de altura igual a $0{,}5$;

» x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BFA, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes.

3.1.1. Mostre que o **perímetro** do polígono $[ABCEF]$ é dado, em função de x, por

$f(x) = \frac{3+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Sugestão: tenha em conta que os triângulos $[ABF]$ e $[CDE]$ são semelhantes.

3.1.2. Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

3.1.3. Mostre que $f'(x) = -\frac{3\cos x + 1}{\operatorname{sen}^2 x}$ e estude a função quanto à monotonia.

3.2. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de x *para o qual o perímetro do polígono* $[ABCEF]$ *é* 4 ?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.
Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **6**

Cada resposta certa: + 1	Cada resposta errada: – 0,2	Cada questão não respondida ou anulada: 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Grupo II **14**

1...**1,6**	**2.**..**6,0**	**3.**..**6,4**
	2.1...................................1,6	**3.1.1.**...............................1,6
	2.2...................................1,4	**3.1.2.**...............................1,4
	2.3...................................1,6	**3.1.3.**...............................1,8
	2.4...................................1,4	**3.2.**..................................1,6

O professor: RobertOliveira   Net: sm.page.vu ou roliveira.pt.to

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' \cdot e^u$

$\left(a^u\right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \{0, \ldots, n-1\}$