

6.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2

Duração: 90 minutos

3.º Período – 28/05/02

Nome:

N.º:

Classificação:

**Grupo I**

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Independentemente do operador em Portugal, os números de telemóvel têm nove algarismos: ou começam por 91 ou por 93 ou por 96. Quantos números de telemóvel constituídos **só por algarismos superiores a 5** podem ser atribuídos em Portugal?

(A) 13486

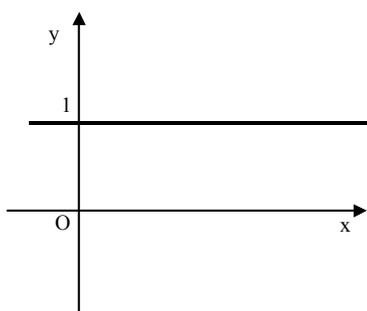
(B) 14863

(C) 16384

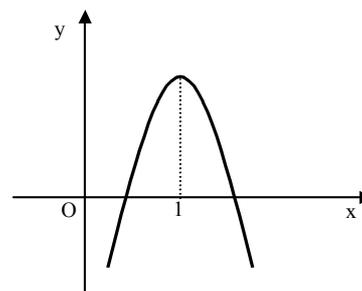
(D) 18364

2. Seja  $p$  uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de  $p$ ?

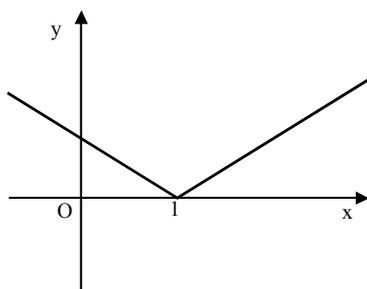
(A)



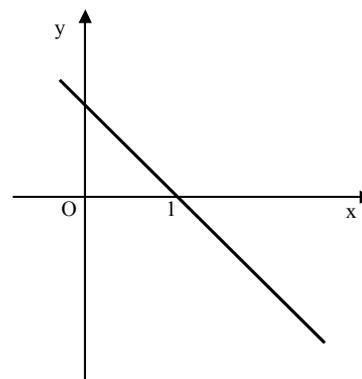
(B)



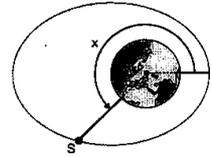
(C)



(D)



3. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. A distância  $d$ , em km, do satélite ao centro da Terra, é dada por
- $$d = \frac{7820}{1+0,07 \cos x}$$



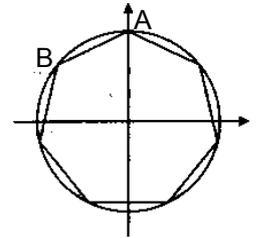
O ângulo  $x$ , assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra e a sua amplitude é de  $230^\circ$ . Tendo em conta estes dados, o valor aproximado de  $d$  é:

- (A) 8263 km                      (B) 8188 km                      (C) 7308 km                      (D) 9050 km

4. Considere o número complexo  $z = 7 - i$ . Qual é o valor de  $\frac{1}{z}$  ( $\bar{z}$  é o conjugado de  $z$ )?

- (A)  $1 + 7i$                       (B)  $\frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$                       (C)  $\frac{1}{50} - \frac{7}{50}i$                       (D)  $7 - i$

5. Na figura está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 2 e cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 7 de um certo número complexo. O vértice A pertence ao eixo imaginário. Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice B?



- (A)  $2^7 \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$                       (B)  $2 \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$                       (C)  $2^7 \operatorname{cis}\left(\frac{11}{14}\pi\right)$   
(D)  $2 \operatorname{cis}\left(\frac{11}{14}\pi\right)$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam  $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$  e  $z_2 = 2 + i$ .

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes.

1.1. Averigúe se o inverso de  $z_1$  é, ou não,  $z_2$ .

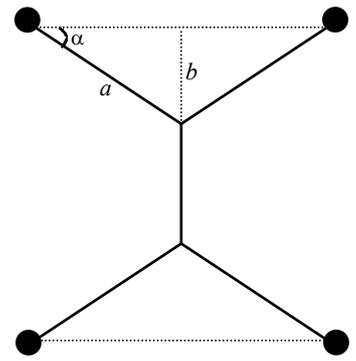
1.2. Determine  $(z_2 - 2)^{11}(1 + 4i)^2$  na forma algébrica.

1.3. Determine  $(3i - z_2)^5$  na forma trigonométrica.

1.4. Resolva a equação  $z^3 = \overline{z_1}$  e interprete geometricamente os afixos das suas soluções.

2. Seja  $w$  um número complexo diferente de 0 cuja imagem geométrica, no plano complexo, pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Seja  $\bar{w}$  o conjugado de  $w$ . Prove que  $\frac{w}{\bar{w}}$  é um imaginário puro.

3. Quatro aldeias situam-se nos quatro vértices de um quadrado de lado 1 km. Ao fazer uma nova instalação de cabos ligando as quatro aldeias, a companhia dos telefones, inspirada nos trabalhos do matemático Jacob STEINER (séc. XIX), chegou à conclusão que a solução mais económica é a do tipo da figura ao lado.



- 3.1. Mostre que o comprimento total do cabo é dado por

$$C(\alpha) = 1 + \frac{2 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[.$$

**Sugestão:** determine primeiro  $a$  e  $b$  em função de  $\alpha$

- 3.2. Calcule e interprete  $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$ . Apresente o resultado em metros arredondado às unidades.

- 3.3. Mostre que  $C'(\alpha) = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$

- 3.4. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor do ângulo  $\alpha$  de modo que o comprimento total do cabo seja o menor possível.

- 3.5. Na figura anterior estão quatro pontos. Suponha que se juntam à figura outros nove pontos. Considere todos os triângulos distintos que se podem construir com todos os treze pontos. Escolhendo ao acaso um desses triângulos, qual é a probabilidade de ele conter só pontos da figura original? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

FIM

## COTAÇÕES

Grupo I ..... 5

Cada resposta certa .....	+ 1
Cada resposta errada .....	- 0,2
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Grupo II ..... 15

1. ....	5,6
1.1. ....	1,4
1.2. ....	1,4
1.3. ....	1,4
1.4. ....	1,4
2. ....	1,4
3. ....	8,0
3.1. ....	1,7
3.2. ....	1,5
3.3. ....	1,6
3.4. ....	1,6
3.5. ....	1,6

O professor: RobertOliveira  
internet: [sm.page.vu](http://sm.page.vu)  
ou [go.to/roliveira](http://go.to/roliveira)