

6.º TESTE DE MATEMÁTICA - 12.º 2

Duração: 90 minutos

3.º Período – 28/05/02

Nome:

N.º:

Classificação:

Grupo I

- As cinco questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Independentemente do operador em Portugal, os números de telemóvel têm nove algarismos: ou começam por 91 ou por 93 ou por 96. Quantos números de telemóvel constituídos **só por algarismos superiores a 5** podem ser atribuídos em Portugal?

(A) 13486

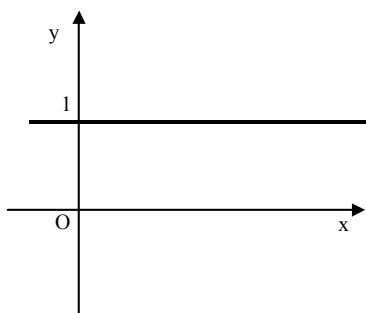
(B) 14863

(C) 16384

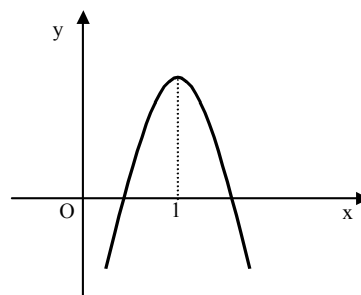
(D) 18364

2. Seja p uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de p ?

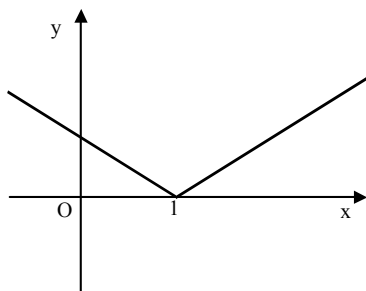
(A)



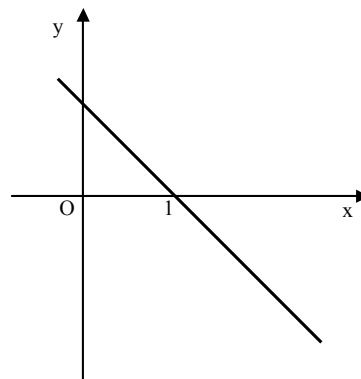
(B)



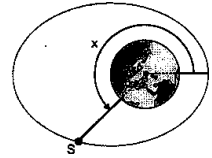
(C)



(D)



3. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. A distância d , em km, do satélite ao centro da Terra, é dada por
- $$d = \frac{7820}{1+0,07 \cos x}$$



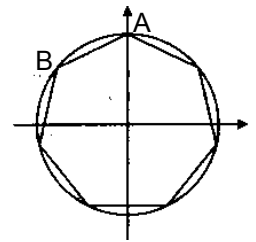
O ângulo x , assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra e a sua amplitude é de 230° . Tendo em conta estes dados, o valor aproximado de d é:

- (A) 8263 km (B) 8188 km (C) 7308 km (D) 9050 km

4. Considere o número complexo $z = 7 - i$. Qual é o valor de $\frac{1}{z}$ (\bar{z} é o conjugado de z)?

- (A) $1 + 7i$ (B) $\frac{7}{50} - \frac{1}{50}i$ (C) $\frac{1}{50} - \frac{7}{50}i$ (D) $7 - i$

5. Na figura está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 2 e cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 7 de um certo número complexo. O vértice A pertence ao eixo imaginário. Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice B?



- (A) $2^7 \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ (B) $2 \operatorname{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ (C) $2^7 \operatorname{cis}\left(\frac{11}{14}\pi\right)$
 (D) $2 \operatorname{cis}\left(\frac{11}{14}\pi\right)$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ e $z_2 = 2 + i$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as alíneas seguintes.

1.1. Averigúe se o inverso de z_1 é, ou não, z_2 .

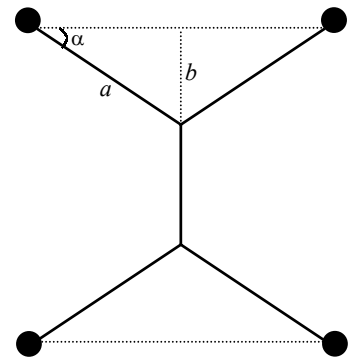
1.2. Determine $(z_2 - 2)^{11}(1 + 4i)^2$ na forma algébrica.

1.3. Determine $(3i - z_2)^5$ na forma trigonométrica.

1.4. Resolva a equação $z^3 = \overline{z_1}$ e interprete geometricamente os afixos das suas soluções.

2. Seja w um número complexo diferente de 0 cuja imagem geométrica, no plano complexo, pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Seja \bar{w} o conjugado de w . Prove que $\frac{w}{\bar{w}}$ é um imaginário puro.

3. Quatro aldeias situam-se nos quatro vértices de um quadrado de lado 1 km. Ao fazer uma nova instalação de cabos ligando as quatro aldeias, a companhia dos telefones, inspirada nos trabalhos do matemático Jacob STEINER (séc. XIX), chegou à conclusão que a solução mais económica é a do tipo da figura ao lado.



- 3.1. Mostre que o comprimento total do cabo é dado por

$$C(\alpha) = 1 + \frac{2 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Sugestão: determine primeiro a e b em função de α

- 3.2. Calcule e interprete $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Apresente o resultado em metros arredondado às unidades.

- 3.3. Mostre que $C'(\alpha) = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$

- 3.4. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor do ângulo α de modo que o comprimento total do cabo seja o menor possível.

- 3.5. Na figura anterior estão quatro pontos. Suponha que se juntam à figura outros nove pontos. Considere todos os triângulos distintos que se podem construir com todos os treze pontos. Escolhendo ao acaso um desses triângulos, qual é a probabilidade de ele conter só pontos da figura original? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 5

Cada resposta certa	+ 1
Cada resposta errada	- 0,2
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Grupo II 15

1.	5,6
1.1.	1,4
1.2.	1,4
1.3.	1,4
1.4.	1,4
2.	1,4
3.	8,0
3.1.	1,7
3.2.	1,5
3.3.	1,6
3.4.	1,6
3.5.	1,6

O professor: RobertOliveira
internet: sm.page.vu
ou go.to/roliveira